様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 ２１ 日現在

機関番号：２４４０３
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2016
課題番号：２６６１０００９

研究課題名（和文）導来ガブリエル位相とその応用：dg代数の完備化、局所化、コシュール双対性の研究

研究課題名（英文）derived Gabriel topology and its applications

研究代表者
源　泰幸（Minamoto, Hiroyuki）

大阪府立大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：５０５２７８８５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：環Rとは加減乗が可能な数の体系であり、R加群とはRの作用を持つ加群である。それらの関係をホモロジー代数という手法で調べる際には環の概念を微分次数付(DG)環まで拡張するのが自然であり、今回はDG環の基礎理論の研究を行った。可換子環をとるという操作はDG環にまで拡張され重要な役割を果たすのであるが、環に対するある基本的な命題が成り立たないことを発見した。またDG環の普遍局所化を環の導来圏の部分三角圏の分類問題に応用したり、米田代数に入るマッセイ積を米田拡大の言葉で書き下しGugenheim-Mayの定理に見通しの良い証明を与えた。さらにDGフロベニウス代数のA∞中山自己同型の存在を示した。

研究成果の概要（英文）：A ring R is a system of numbers which admits addition, subtraction and multiplication and that an R-module is a module which admits an action of R. Studying relationship between R-modules via homological algebra, requires enlarge rings into differential graded(DG) rings. In this project, I had studied basic theory of DG-rings. I found that a basic property of commutator rings does not hold for DG commutator rings. I introduced universal localization for DG-rings and applied it to classification problem of thick subcategories of the derived category of a ring.I computed Massey products on Yoneda algebra in terms of extensions of the modules and, as an application, gave a clear proof and generalization of Gugenheim-May Theorem. I showed that DG-Frobenius algebra possesses an A-infinity Nakayama automorphism.

研究分野：代数学

キーワード：ホモロジー代数　導来圏　微分次数付圏

１．研究開始当初の背景

(1)導来圏に関わる数学は代数幾何、非可換代数幾何、表現論、数理物理学等、様々な分野を巻き込み大きく広がり進展している。その発展と共に、導来圏をそのままで扱うと不都合が多く、その構成の前段階であり、より多くの情報を保持した余鎖複体の微分次数付(DG) 圏と、それを扱う技術であるホモトピー代数（モデル圏の理論）の重要性が認識される様になった。この研究の目的は微分次数付圏を環論的な観点から研究すること、特に導来可換子環の研究であった。

(2) 環 R の導来圏 D(modR) の部分三角圏を分類するという問題がある。R が可換ネター環の場合は Hopkins-Neeman によりアファインスキーム SpecR を用いて分類できることが知られている。有限群の群環 kG に対しては Benson-Iyenger-Krause による結果があり、（これは導来圏ではないが）Cohen-Macalau 加群の安定圏に関しては高橋亮氏による結果がある。これらは部分三角圏と何らかの幾何学的な対象との対応を示唆することから圏論的代数幾何学の基本的な問題と言える。しかし、この問題は一般の非可換環では余り手が付けられていなかった。

(3) Ext 代数 Ext(M,M) は単なる代数ではなく微分次数付代数のコホモロジー代数であり、その事からマッセイ積と呼ばれる、より豊富な構造を持っている。これらの構造と完全列の関係は明らかではなかった。

次数付代数 A の米田代数 Ext(S, S)(S は単純加群の直和) は次数 0, 1 の部分により高次の積（通常の積とマッセイ積）で生成されるという、Gugenheim-May の結果があった。

(4) リー環の表現論から生まれた準遺伝的代数と呼ばれるクラスの代数があり、これはリー環の表現論においても有限次元代数の表現論においても詳しく研究されている。

準遺伝的代数Λ のリンゲル双対とは準遺伝的代数に備わる特別な加群の自己準同型環として得られる導来圏同値な準遺伝的代数 R(Λ) である。双対と呼ばれるだけあって二回施すと元に戻る：RR(Λ) = Λ.その現象を詳しく見ると、リンゲル双対関手を二回合成するとセール関手が得られる、というクラウゼの結果になる。

準遺伝的代数は体を貼り合わせることで得られるという事実からもこれが基本的な代数ということがうかがえる。

(5) 自己入射的代数の特別なクラスにフロベニウス代数がある。森田同値を法とすれば同じ概念なので同一視される事が多い。しかし、フロベニウス代数は良い対称性を持つ代数として定義される。その対称性が活躍する例としては、可換フロベニウス代数と２次元位相的場の理論の等価性がある。フロベニウス代数を用いることで複体の概念することも出来、これは私と伊山修氏との共同研究である。

フロベニウス代数はその Koszul 双対が捩じれ Calabi-Yau 代数であるとの特徴づけをもつ。よって捩じれ Calabi-Yau 代数と同様にフロベニウス代数も DG 代数の範囲で考えるのが今後の発展が望めるであろう。

(6) 自己入射代数(＝自己入射次元が 0 の代数) の研究は代数の表現論の中心的なテーマの一つであった。その一般化として岩永ゴレンシュタイン代数(=自己入射次元が有限な代数) の研究も行われてきた。近年では団圏の研究や Geiss-Leclerc-Schroer による前射影的代数の一般化等にも現れ、応用上からも注目を集めている。

２．研究の目的

(1) 導来二重可換子環をとる操作は圏論的代数幾何学においては完備化を与えることは可換ネター環に対しては Dwyer-Greenlees-Iyenger が証明し、その一般化が Efimov、Porta-Shaul-Yekutieli により与えらていた。私は導来二重可換子環をホモトピー極限で表示する公式を与え、それにより上の定理に見通しの良い証明をあたえた。本研究の目的はこの手法の更なる深化にあった。

(2) 非可換環の導来圏の部分三角圏の分類問題に関して基本的なのは次の予想である。アルティン代数に対して局所環であることと導来圏が自明な部分圏しか持たないことは同値である。私は導来普遍局所化という DG 環の構成法を開発し、それを応用して解決を目指した。

(3) 背景の項目で述べた Gugenheim-May の定理は次数付代数 A の非常に基本的な事実を述べている様に見える。しかし、彼らの証明は代数的 Eilenberg-Moore スペクトル系列の複雑な計算に依っており、何故この定理が成り立つのかを教えてはくれなかった。

(4) 研究の目的はリンゲル双対を導来圏の貼り合わせの観点から理解することであった。（また導来圏の貼り合わせ理論を修得するというのも目的であった。）特に二回リンゲル双対を施すとセール関手が得られるというクラウゼの結果を理解することを目指した。

(5) （DG ではない通常の）フロベニウス代数には中山自己同型という特別な代数自己同型があり、対称性を記述するのに不可欠であった。DG 代数の範囲でフロベニウス代数を定義しても通常の場合と同様には中山自

己同型を構成出来なかった。

(6) これは山浦浩太氏（山梨大学）との共同研究である。フロベニウス代数の様に良い対称性から定義される次数岩永ゴレンシュタイン代数のクラスを我々は発見したので、これを研究することが当初の目的であった。

研究の中で開発した手法により有限次数付岩永ゴレンシュタイン代数とそのCM加群の安定圏を研究することが可能になったので、それを推し進めた。

３．研究の方法

(1) DG ではない通常の環に対しては可換子環と三重可換子環は常に一致していた。その導来版は Koszul 双対の理論に深く関わり重要なので、これを示すことを目指した。通常、環に対して形式的に成立する命題はDG環に対しても成立するのであり、この命題も同様に成り立つものと予想された。しかし、目的の項目で述べた導来二重可換子環のホモトピー極限による表示式の成立状況を検討することにより定理が不成立であることを示唆する観察を得た。

(2) 環に元と関係式を追加してその射影加群の間の準同型写像を可逆化する構成を普遍局所化というが、これを DG 環の理論に一般化するとすれば完全複体を可縮にする操作になると考え、それを導来普遍局所化と呼ぶことにした。

目的の項目で述べた予想は部分三角圏の問題であるが、ある導来普遍局所化 DG 環の自明性に帰着することを示した。導来普遍局所化 DG 環というのは具体的に構成されるものであり、その自明性も単位元 1 が余境界であることを示せば確認できる。故に部分三角圏を求めるという容易ではない問題を具体的な計算に帰着したといえる。

(3) Ext 代数 Ext(M,M) の元は完全列で代表され、その積は完全列をつなげることで得られた。今回は同様にマッセイ積を完全列を用いた言葉で表示することを考えた。Bar 構成を用いて加群の分解を与え、それによりマッセイ積を計算することで目的を達成した。

(4) P. Jorgense により貼り合わせを入れ替える操作が導入されていたので、これを貼り合わせの列に拡張した。考察する状況では貼り合わせる三角圏に t-構造があるので、それを列にそって貼り合わせることで入れ換えた貼り合わせの列から t-構造が定義される。Koenig-Yang, Nicolas-Keller による t-構造と準傾対象との一対一対応を用いることで入れ換えた貼り合わせの列から準傾対象を得るのである。

(5) DG 代数の範囲で中山自己同型が構成出来ない原因は擬同型が可逆でないことである。DG 代数よりも更にホモロジー的な意味で範囲の広い代数の概念に A∞代数というものがある。ここでの要点は DG 代数の間においても DG 代数射ではない A∞代数射が存在することである。

A∞代数の範囲の中では擬同型は（ある意味）可逆であるので、通常のフロベニウス代数に対する中山自己同型の構成を DG 代数の状況に移植することが可能になる。

(6) 有限次元次数付代数は自明拡大代数と森田同値であるので、研究はこの場合に帰着される。これまでの研究で培った複体を扱う技術により自明拡大代数の次数加群を分解しそこに拡大に使用する両側加群の導来テンソル積の作用を見出した。これを元にして岩永ゴレンシュタイン性の特徴づけ（加群論的、圏論的）を得た。

４．研究成果

(1) 方法の項目で述べた観察を得てからは研究の方針を反例の構成に変更し、実際に反例を得ることに成功した。

一方、肯定的な結果として導来可換子環をとる DG 加群を Dwyer-Greenlees-Iyengar により導入された代理的コンパクトDG加群に制限すれば導来可換子環と導来三重可換子環は常に一致することを示した。

(2) 先に述べたことと一部重複するが結果は以下である。射影加群の可逆化として定義されていた導来普遍局所化を完全複体の可縮化と捉え直して自然な一般化を与えた。一般化した導来普遍局所化を用いて環 R 上の完全複体 X が導来圏を生成する判定条件を与えた。具体的な場合に上の判定条件をチェックすることで完全複体 X が導来圏を生成することを示した。

しかし、具体的な計算により自明性を確認できるのは今のところごく限られたものである。組織立てて計算する方法を開発するか、別の手法を加えるのでなければ、この方針で予想を解決するのは困難であると予想される。

(3) Ext 代数 Ext(M,M) の高次マッセイ積を完全列の言葉で記述した。

応用として次数付代数 A の米田代数 Ext(S, S)(S は単純加群の直和) は次数 0, 1 の部分により高次の積（通常の積とマッセイ積）で生成されるという Gugenheim-May の結果の見通しの良い証明を得た。実際、この定理の成立は、任意の有限次元加群は組成列を持つ、という初等的な事実の帰結であることを明らかにした。

技術的なことであるが、元々の Gugenheim-May の結果にはマッセイ積より一般の行列マッセイ積が必要であったが今回の研究によりそれが通常のマッセイ積で

事足りることも明らかとなった。

(4) 準遺伝的代数Λ を作り出す体の貼り合わせからリンゲル双対 R(Λ) を作り出す体の貼り合わせは圏論的な操作で得られることを示した。
リンゲル双対を二回施すとセール関手になるというクラウゼの結果の成立要件を明らかにした。リンゲル双対がなぜ「双対」であるのかを明らかにした、と言ってもよい。
体を貼り合わせて得られる準遺伝的代数から範囲を広げて一般の代数を貼り合わせて出来る代数に対してリンゲル双対という概念を定義し、簡単な場合を計算した。

(5) A∞加群の自己同型 A∞環の積を書き下した。A∞代数射により加群を捻ったさいの作用を書き下した。そして DG フロベニウス代数が A∞代数射として中山自己同型を持つことを示した。
その際、A∞代数射の間のホモトピーの合成が加群の捻りには strict に現れることを発見した。

(6) 自明拡大代数 A + M が岩永ゴレンシュタインである為の特徴づけを A と M の言葉で与えた。まずは加群論的な特徴づけを与え、次に A 自身が岩永ゴレンシュタインと仮定して三角圏論的特徴づけを与えた。その成果を元にしてCM加群の安定圏がAの導来圏に両側許容圏として埋め込めることを示した。系として CM 加群の安定圏の Grothendieck 群が有限階数の自由群であることが従う。また、三角圏論的特徴づけを用いて A が A3 型のクイバーの道代数の場合に A+M が岩永ゴレンシュタインとなる M の分類に成功した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① Hiroyuki Minamoto
Ringel duality and Recollements 、Proceedings of the 49th Symposium on Ring Theory and Representation Theory(Osaka,2016) p 86-91 2016、査読なし

② Hiroyuki Minamoto
Higher products on Yoneda Ext algebras、Proceedings of the 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory(Nagoya,2015) p 92-95 2015、査読なし

③ Hiroyuki Minamoto
複体の一般化とそのホモトピー圏、導来圏、Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2015 proceedings 2015 p 98-103、査読なし

④ Osamu Iyama Hiroyuki Minamoto
On a generalization of complexes and their derived categories、Proceedings of the 47th Symposium on Ring Theory and Representation Theory(osaka,2014) p 63-68 2014、査読なし

〔学会発表〕（計１８件）

① Hiroyuki Minamoto
On finite dimensional graded Iwanaga-Gorenstein algebras and their categories of stable Cohen-Macaulay modules、Representation Theory of Quivers and Finite Dimensional Algebras、2017.2.20 オーバーボルファッハ（ドイツ）

② Hiroyuki Minamoto
米田代数に入るマッセイ積とその応用、神楽坂代数セミナー、2016.12.17、東京理科大学（東京都）

③ Hiroyuki Minamoto
On finite dimensional graded Iwanaga-Gorenstein algebras and their categories of stable Cohen-Macaulay modules、名古屋大学環論表現論セミナー、2016.11.29、名古屋大学（名古屋市）

④ Hiroyuki Minamoto
On finite dimensional graded Iwanaga-Gorenstein algebras and their categories of stable Cohen-Macaulay modules、岡山可換代数表現セミナー、2016.10.31、岡山大学（岡山市）

⑤ Hiroyuki Minamoto
Ringel duality and recollements、第４９回環論および表現論シンポジウム、2016.9.2、大阪府立大学（堺市）

⑥ Hiroyuki Minamoto
Tilting bundle on anti-Fano algebras、Workshop and International Conference on Representations of Algebras、2016.8.17、シラキュース（アメリカ）

⑦ Hiroyuki Minamoto
Tilting bundle on anti-Fano algebras、Workshop on Weighted Projective Spaces、2016.3.5、合肥（中国）

⑧ Hiroyuki Minamoto
(Anti-)Fano 代数と傾斜束、（非）可換代数とトポロジー、2016.2.21、信州大学（松本市）

⑨ Hiroyuki Minamoto
次数フロベニウス代数のある一般化につい

て、可換環論セミナー、2016.1.24、岡山理科大学（岡山市）

⑩ Hiroyuki Minamoto
Tilting bundle on Fano Algebras 、Preprojective Algebras Interacting with Singularites, Cohen-Macaulay Modules and Weighted projective spaces、2015.10.8、オアハカ（メキシコ）

⑪ Hiroyuki Minamoto
Higher Products on Yoneda Algebras、第４８回環論および表現論シンポジウム、2015.9.9、名古屋大学（名古屋市）

⑫ Hiroyuki Minamoto
複体の一般化とそのホモトピー圏について、Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2015、2015.6.6.、岡山いこいの村（瀬戸内市）

⑬ Hiroyuki Minamoto
商体入門、第７回代数若手セミナー、2015.3.17、名古屋大学（名古屋市）

⑭ Hiroyuki Minamoto
A relationship between noncommutative projective geometry and representation theory of finite dimensional algebras via derived categories、第３６回可換環論シンポジウム、2014.11.23.、IPC 生産性国際交流センター（千葉県）

⑮ Hiroyuki Minamoto
Derived bi-duality and DG-completion、日本数学会 2014 年度秋季総合分科会、2014.9.27、広島大学（東広島市）

⑯ Osamu Iyama、Hiroyuki Minamoto
On a generalization of complexes and their derived categories、第４７回環論および表現論シンポジウム、2014.9.13、大阪市立大学（大阪市）

⑰ Hiroyuki Minamoto
Derived bi-commutator ring and DG-completion、Workshop and International Conference on Representations of Algebras、2014.8.27.、海南島（中国）

⑱ Hiroyuki Minamoto
Derived bi-commutator ring and DG-completion、Ring and Representation Theory seminar、2014.7.18、名古屋大学（名古屋市）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
源　泰幸（MINAMOTO HIROYUKI）
大阪府立大学　理学系研究科　准教授
研究者番号：50527885

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし