2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １８ 日現在

機関番号：１１３０１

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2017

課題番号：２６６１００１１

研究課題名（和文）幾何学的値分布論

研究課題名（英文）Geometric value distribution theory

研究代表者

宮岡　礼子（Miyaoka, Reiko）

東北大学・高度教養教育・学生支援機構・総長特命教授

研究者番号：７０１０８１８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：代数的極小曲面のガウス写像g の除外値が高々２であるという予想は，代数的議論からは解決できない．我々はガウス写像を，曲面の普遍被覆面である円板にリフトし，曲面の基本群作用で不変なガウス写像の除外値数を，ネバンリンナ理論を用いて証明する方針で，研究を進めた．
１．gの特性関数の増大度を上から抑えるκの評価を得た．２．ガウス写像の像のフビニスタディ計量で測った面積と，双曲計量で測った面積の比を下から評価した．３．対数微分の補題の幾何学的意味を解明した．４．周期条件を最大限に活用する方策として，座標関数を指数関数の肩にのせることにより，実周期がない＝絶対値が一定という観点で見直し，活用した．

研究成果の概要（英文）：The conjecture that the Gauss map of an algebraic minimal surface M in the Euclidean 3-space omits at most 2 points is a long standing problem. We lift the Gauss map to the universal covering of the surface, which is invariant under the action of the fundamental group of M, and apply the Nevanlinna theory to the lifted g.
1. We obtain the upper bound of κ which estimate the growth order of the characteristic function of g. 2. The ratio of the spherical area of the image of the Gauss map from the universal covering, and the hyperbolic area of the disk is bounded below by certain way. 3. Clarify the geometric meaning of the Lemma on logarithmic derivative. 4.We put the coordinate function as a power of the exponential function, then translate the no real period condition into that the absolute value of the exponential function is invariant. This is a use of the period condition in the most effective way to induce a defect relation.

研究分野：微分幾何学

キーワード：極小曲面　ガウス写像　除外値問題　ネバンリンナ理論　普遍被覆　基本群作用

１．研究開始当初の背景
H23-25 の挑戦的萌芽研究に引き続き，代数的極小曲面のガウス写像の値分布の未解決問題：「代数的極小曲面のガウス写像の除外値数は高々２」の解決に取り組んだ．
２．研究の目的
一般の完備極小曲面のガウス写像の除外値数が高々４であることは 1988 年に藤本氏により解決されているが，代数的極小曲面のガウス写像の除外値数の評価は 1964 年の Osserman による高々３との結論（シャープであるとは限らない）から進展していない．そこでシャープな値を求めるという課題に取り組む．
３．研究の方法
代数的極小曲面 M とは，全曲率が有限な完備極小曲面という定義で与えられ，Osserman により，このとき M は穴あきリーマン面で，ワイエルシュトラスデータが穴を超えて正則拡張できることが示された．
代数的極小曲面のガウス写像の除外値数が２である例は，1994年Miyaoka-Satoにより，ほとんどの位相型で構成されているが，除外値数３の例を作ることはできなかった．そこで除外値数は高々２であるとの予想を立てたが，驚くべきことに，完全分岐値数という，除外値数に密接に関係する数が 2.5 である例が，上記の Miyaoka-Sato 曲面の中に存在することを，川上裕氏が示した(2006).藤本の定理においては，除外値数も完全分岐値数も４で抑えられていることから，代数的極小曲面の特殊性が示唆される．

我々は M の普遍被覆である円板上でネバンリンナ理論を展開することにより，この問題に取り組んだ．藤本氏の証明においてはネバンリンナ理論は使われていない．

今我々は特殊事情，すなわち円板上の有理型関数 g に極小曲面の基本群作用があることを前提とする．これを手がかりに特性関数の増大度を評価し，単位円板の半径１を無限に変換するパラメーター変換を経て，g に対して対数微分の補題を適用し，最終的には周期条件を生かすもう一つの関数を考え，第２主要定理から defect relation を得る手順を得たが，最終証明には至っていない．以下に詳述する．

４．研究成果
ネバンリンナ理論においては，有理型関数 f の個数関数 $N_f(r)$,接近関数 $m_f(r)$，およびその和で与えられる特性関数 $T_f(r)$についてそれぞれの評価を行う．ここに領域が全平面の場合は半径 r の円板を考え，$r\to\infty$とするが，我々は円板を考えるので $0<r<1$ で，開円板 D(r)で値 a を f が取る重み付き個数関数$N_f(r)$, D(r) の境界での値 a への接近度を表す接近関数 $m_f(r)$の $r\to 1$での挙動をみる．これら各々は a により変わるが，その和である特性関数 $T_f(r)$は a によらない．これが第１主要定理である．例えば f が a を除外するならば，$N_f(r)=0$ であるが，その分 $m_f(r)$が大きくなる．

さて，ガウス写像 g の除外値が高々２であるという予想を考える際，代数的曲面の位相は双曲型，すなわち普遍被覆が円板の場合を考えれば十分なことが知られている．このことから，元の曲面には双曲計量が誘導される．他方，ガウス写像は S^2 への写像であるのでフビニスタディ計量も誘導される．前者による M の面積を A_h，後者を A_F と記すと，その比 A_F/A_h が重要な役割をはたす．我々は以前この比を R とおくと，擬代数的極小曲面に対しては $R\geqq 1$ がなりたち，代数的極小曲面に対しては $R>1$ が成り立つことを示した（Forum Math.2008）．ここでは Riemann-Roch と，Riemann-Hurwitz の定理を用い，Osserman の定理を精密化したが，残念ながら，Osserman と同じ除外値数$\leqq 3$ までしか得られず，代数的議論の限界が示された．

そこで普遍被覆上のネバンリンナ理論による解決を目指し，この問題に取り組んできた．円板上では R に対応する比は D(r) の双曲面積とフビニスタディ面積の比となるが，基本領域のカスプが D(r) で切り取られることから，この比の増大度の評価は極めて困難である．中心極限定理的考察を行うことにより，このフラクタル状の変形部分の面積の増大度の考察を explicit に行うと，ある数κ_gを得ることができる．これは

$$\kappa_g=\inf\{\kappa \mid \int \exp(\kappa T_g(t))dt=\infty\}$$

として与えられ，$2<\kappa_g<e_+$(自然対数の底 e より少し大きい)であることまでわかる．ここでの議論ははじめ混沌としていたが，S^1 の力学系を，基本群のうちの放物変換によるカスプの分布を見るということで，少し見通しがよくなった．κ_gの値は最後まで本質的な役割を担う．

次に f（ここでは一般の f）の値分布について対数微分の補題を用いる．この補題の幾何学的意味は，研究協力者の小林亮一氏により与えられている．つまり，f が値 a をとる場合，その重複度を数えることができるが，除外値における f の重複度は∞と考えることで，その解釈がつくというものである．別の言い方をすると，境界に近づくときの a への近づき方は，S^2 上で a に限りなく接するように近づくということである．実際対数微分の補題では f'/f の a の∞への近づき方を評価するもので，これが小さいことは（a が除外値なら小さい）重複度∞を意味している（$m_f(r)$は大きい）．これを用いると，ネバンリンナの第２主要定理が導かれ，defect relation とよばれる除外値の個数評価を得る．

このストーリーを明確にするには多くのステップを要する．D(r)上の各関数の増大度を

調べるとき，曲面に落として考えると，カスプ（穴）の周りの挙動が本質的である．ここでカスプにおける座標の取り方が２種類あり，円板の座標で考えるか，元の曲面の穴の周りの座標で考えるかを区別し，またその間の関係を見る必要が生じる．穴あき領域では，よく知られている特異双曲計量を用いるが，定数に任意性があり，その調整をすることにより，S^2の計量との比較をする．ここではフビニスタディ計量を変形して，pillow metric とよばれる，平坦な円板を２枚つなげた計量を用いる．その際共形変形を用いることにより，M の穴で取られる値とガウス写像の微分が消える点の像を全て S^2 の北極の近傍に押し込めることが可能である．これは M においてはある極を固定すると，その円環近傍に対応する M の部分が，先に述べた双曲面積と球面面積の比の増大度に深く関わることを意味する．つまりこの円環内の比が本質的で，その評価をすることが必要となる．その評価のため，比の最大値を与える箇所での値が停留的であることを言わねばならないが，ここは中心極限定理的な議論になり，明確化が難しい．我々は最悪の状況を考えることにより，この評価を行なっている．

ここでの考察は，最後に周期条件をどう使うかにも密接に関係する．極小曲面を線積分で定義するにはその実周期が消えることが必要であった．これらの被積分関数のどんな一次結合の積分 e^H も実周期を持たないことから，e^Hは絶対値が基本群作用で保たれることになる．これは，正則関数 e^Hの特性関数の増大度があまり大きくならないことを意味している．実際この増大度は，ガウス写像 g と同程度であることが導かれ，対数微分の補題がまた使えることになる．

これらを全て総合して，第２主要定理を導出すると，κ_gを用いた除外値の個数評価ができ，κ_g=e_+(e より少し大きい)ことから，除外値数が高々２であることが従う．

周期条件を外すと，この評価は「藤本の定理」の評価 4 と同じになり，Scherk の曲面が値 4 をとるので，シャープな評価になる．つまり，周期条件は，e^Hの特性関数の増大度に本質的影響を与えている．

以上の証明には 100 ページ以上を費やし，プレプリントとしてまとめているが，まだ記述が明確でない箇所があり，公表にはいたっていない．確率論的な考察を用いざるをいない箇所について，理論的な裏付けを与える必要があること，円板上のネバンリンナ理論は存在するが，そこに M の基本群が働いているという状況での新理論をどう打ち立てるかがこの課題解決の主題である．

当初に比べれば，理論の道筋は少しずつ明らかになっており，力学系を用いるなど，工夫することにより，徐々に明確化は進行しているが，最終証明まではまだしばらく時間を要する．

なお当初の最終年度 H29 年に，ブラジルからこの問題を解決したという論文が現れ，その検証に手間取った．結局不十分であるとの結論を得たが，このブランクにより研究が前に進まず，1 年の期間延長を申請して，ネバンリンナ理論による解決の取り組みを継続していることを報告しておく．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計 3 件）Reiko Miyaoka, Exceptional values of the Gauss map of complete minimal surfaces I (2018/3/17) Geometric Analysis Seminar in YMSC (北京，中国)

Reiko Miyaoka, Exceptional values of the Gauss map of complete minimal surfaces II (2018/3/17) Geometric Analysis Seminar in YMSC (北京，中国)

小林亮一，代数的極小曲面のオッサーマン理論の量子化，Complex Geometry and Geometric Analysis 2017/03/15(明大 駿河台)

〔図書〕（計 3 件）
Akito Futaki and Reiko Miyaoka: Springer, Geometry and Topology of Manifolds; 10th China-Japan Conference 2014, 2016 (362 ページ)

宮岡礼子　サイエンス社　現代幾何学への招待　2016（134 ページ）

宮岡礼子　講談社　曲がった空間の幾何学 2017（238 ページ）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織
(1)研究代表者
宮岡 礼子（Reiko Miyaoka）
東北大学・高度教養教育・学生支援機構・
総長特命教授
研究者番号：70108182

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：

(4)研究協力者
小林 亮一（Ryoichi Kobayashi）