

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 20 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2016

課題番号：26610013

研究課題名(和文) グロモフ・ハウスドルフ極限と複素解析幾何

研究課題名(英文) Gromov-Hausdorff limits and complex analytic geometry

研究代表者

二木 昭人 (Futaki, Akito)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：90143247

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：Ricci曲率が下から有界なFano多様体の列のGromov-Hausdorff極限におけるスペクトルの収束を研究した。まず，Ricci曲率が下から有界なFano多様体に対するコンパクト性定理を得た。次に，重み付きラプラシアンGromov-Hausdorff極限での収束性を証明した。そして，極限がKaehler-Ricciソリトンになる場合の正則ベクトル場全体のなす複素Lie環の構造定理を得た。これは東北大学本多正平，東京大学齋藤俊輔との共同研究である。また平均曲率流の自己相似解の錐多様体での発生について，Huiskenらの先行結果を服部広大と山本光との共同研究で拡張した。

研究成果の概要(英文)：I studied the spectral convergence for the Gromov-Hausdorff limits of the sequence of Fano manifolds with Ricci curvature bounded from below. First of all, jointly with Shouhei Honda and Shunsuke Saito, we obtained compactness result for Fano manifolds with Ricci curvature bounded from below. Secondly, we proved the convergence of the spectrum of weighted Laplacian at the Gromov-Hausdorff limit. Thirdly, we obtained a structure theorem for the Lie algebra of all holomorphic vector fields when the limit becomes a Kaehler-Ricci soliton. As a different direction, jointly with Kota Hattori and Hikaru Yamamoto, we extended the earlier work of Huisken to cone manifolds to show the appearance of self-similar solutions of the mean curvature flow.

研究分野：数物系科学

キーワード：グロモフ・ハウスドルフ極限 ケーラー多様体 K 安定性 アインシュタイン計量

1. 研究開始当初の背景

Tian および Chen-Donaldson-Sun により Fano 多様体上の Kähler-Einstein 計量の存在に関する Yau-Tian-Donaldson 予想を証明する論文がいくつかのパートに分けて arXiv 上、および研究集会の講演で発表された。その証明の中核をなすのは因子に沿って cone angle を持つ Kähler-Einstein 多様体のグロモフ・ハウスドルフ収束が実際、小平埋め込みのなされる複素射影空間内で、射影変換を法として代数多様体としての収束と一致するということである。これは Cheeger-Colding-Tian の結果に代数幾何的考察を加えて得られる。

2. 研究の目的

本研究は Kähler 多様体のグロモフ・ハウスドルフ収束の研究、およびその Yau-Tian-Donaldson 予想、リッチ流・平均曲率流の収束、Minimal model program の研究、モデュライ空間のコンパクト化等、複素微分幾何への応用を目的とする。特に、偏極 Kähler 多様体の収束においてはグロモフ・ハウスドルフ極限が代数幾何的極限になる場合があることが近年 Donaldson により明らかにされており、そのメカニズムを解明することにより、新たな知見を得ることを目標とする。

3. 研究の方法

本研究は複素代数幾何、複素解析、リーマン幾何、シンプレクティック幾何など多岐にわたる分野が関連するため、他分野の研究者との交流を必要とする。そのため、国内外の研究集会への参加、講演を通して研究交流を行った。また研究室の大学院生も国内の研究集会に多数参加した。また、国内外の研究者を招いて以下のような研究集会を開催した。

平成 26 年度は Jeff Viaclovsky ウィスコンシン大学教授、本多宣博東北大学教授らと共催する研究集会「Trends in Modern Geometry」の第 1 回を東京大学で開催した。C. Arezzo, O. Biquard, X.X. Chen, N.C. Leung, N. Mok, S. Paul, D. Salamon, J. Song, S. Sun, G. Tian らを招聘し、研究交流を行った。また、第 20 回複素幾何シンポジウムを菅平高原において開催した。平成 26 年度は藤木明、辻元、満淵俊樹他、複素幾何の研究者を招いて、講演、討論を行った。2015 年 3 月には Princeton-Tokyo Workshop on Geometric Analysis を開催した。M. Gursky, G. Székelyhidi が mini course として講義した他、R. Graham, J.M. Lee, R. Mazzeo, D. Phong, J. Sturm, G. Tian, J. Viaclovsky, P. Yang らが講演し、研究交流を行った。

平成 27 年度は Trends in Modern Geometry と 10th Pacific Rim Complex Geometry Conference を兼ねて、東京大学とホテルサンバレー那須で国際研究集会を開催した。M. Abreu, X.X. Chen, R. Conlon, M. Entov,

J.M. Hwang, C. Li, A. Neves, Y.G. Oh, J. Park, Y. Rollin, Y. Rubinstein, J. Viaclovsky, G. Wang, X. Zhu らが講演を行った。

平成 28 年度は引き続き、Trends in Modern Geometry を東京大学で開催した。R. Bamler, T. Collins, G. Dloussky, U. Hamenstaedt, C. LeBrun, J. Lott, E. Shelukhin, J. Solomon, C. Spotti, J. Viaclovsky, C. Woodward らを招聘し、研究交流をお行った。この他、平成 28 年 7 月には Montreal の UQAM で Conference on Differential Geometry を組織し、平成 29 年 1 月には University College London で開催された UK-Japan Winter School の Scientific Committee に加わり、ともに、参加した。Montreal, London とともに S. Donaldson が講演を行った。

4. 研究成果

これまでの研究活動の基本的な問題は Kähler-Einstein 計量を持つ Fano 多様体を GIT 安定性で特徴づける問題であったが、これは数年前に Chen-Donaldson-Sun および Tian により解決された。最初の Calabi の研究は 1950 年代に始まり、Aubin と Yau により、第 1 Chern 類が負と 0 の場合に Kähler-Einstein 計量の存在が無条件に証明された。第 1 Chern 類が正、すなわち Fano 多様体の場合は、Kähler-Einstein 計量を持つための必要十分条件は K 安定であることである。これが上述の GIT 安定性である。ここで Fano 多様体 M が K 安定とは M のすべての退化に対し、二木不変量が正になることである。これは二木不変量を数値的不変量として Hilbert-Mumford 判定法を適用したものである。これは Tian により提案され、Donaldson のより深められ、Li-Xu により精密化されている。

Kähler-Einstein 計量の存在は Monge-Ampère 方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式に帰着される。この方程式を 1 助変数で考え、自明に解が存在する場合を出発して、欲しい解が得られることを open かつ closed の議論を用いて示す。この方法は Ricci 曲率の変形を伴う Kähler 計量の変形であり、Fano 多様体の場合、Ricci 曲率が下から正の定数で有界である。Closedness が示されない場合、計量は収束しないが、Gromov-Hausdorff 位相では距離空間として収束する。この極限を調べるのが証明の本質である。この証明が与えられるに伴い、Gromov-Hausdorff 極限として現れる複素空間の代数幾何的性質が同時進行で研究されている。この方向で

A. Futaki, S. Honda and S. Saito: Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence. To appear in Asian J. Math., arXiv:1509.03862

が本課題の研究期間中に得られた成果である。この論文では Fano 多様体の重み付きラプラシアン第 1 固有関数と正則ベクトル場

との関係が、反標準類に Kähler 計量を持つ Fano 多様体の無限列の Gromov-Hausdorff 極限でも成立するかを論じた。極限において、Lie 環の構造が保たれるかが難しい点で、ある程度の仮定をおかないと欲しい結論には至らなかった。ただ、Ricci 曲率に両側有界の仮定をおくと無条件に欲しい結論が得られる。

Cheeger-Colding に始まる Ricci limit space の理論では、接錐の性質を極限空間の性質に反映させることが議論の大筋である。その意味で、極限空間の接錐についての研究が第 1 歩である。そもそも、接錐が一意的かというのが基本的であるが、一般の Riemann 多様体の場合、Ricci 曲率が下から有界な列の極限空間は接錐が一意的でないことが Colding-Naber によって例をもって示されている。ただし、接錐が滑らかな cross section を持てば一意的である。

一方、Donaldson-Sun は両側から Ricci が有界な Kähler-Einstein 多様体の無限列の Gromov-Hausdorff 極限の性質を調べ、極限は正規代数多様体であること、接錐は一意的であること、接錐の正則部分は佐々木・Einstein 多様体であることを示している。Riemann 多様体 S が佐々木多様体とは、 S の錐 $C(S)$ が Kähler 多様体の時をいう。 S がトーリックとは、 $C(S)$ が通常の複素幾何の意味でトーリックのときをいう。従って $\dim R S = 2n-1$ のとき、 n 次元トーラス T_n が $C(S)$ に双正則かつ等長的に作用する。当該研究者はこれまで小野肇、Guofang Wang との共同研究で高さ一定のトーリック・ダイアグラムから作られる佐々木多様体は佐々木・アインシュタイン計量を持つことを証明した (Journal of Differential Geometry, 2009)。このことからトーリック佐々木・アインシュタイン多様体はトーリック・ダイアグラムという組み合わせ的データと同一視される。本研究の今後の方向として、佐々木・Einstein 多様体に対する知見を Kähler 多様体の列の Gromov-Hausdorff 極限の幾何に適用することが一つの流れとしてすでに進行しつつある。

もう一つの研究成果は、平均曲率流の単調性公式とそれに伴う自己相似解の発生の研究である。服部広大、山本光との共同研究により、錐多様体に対し Huisken の結果を拡張した。研究室に所属していた山本光は、さらに、コンパクト多様体上のリッチ流を背景とする状況で単調性公式と自己相似解の発生を明らかにした。自己相似解は Gromov-Hausdorff 極限の一つであり、同じ枠組みで今後も引き続き研究すべき対象である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Akito Futaki, Einstein metrics and GIT stability. II. Sugaku Expositions 28 (2015), pp. 231-249.

Akito Futaki, The weighted Laplacians on real and complex metric measure spaces, in Geometry and Analysis on Manifolds, In Memory of Professor Shoshichi Kobayashi, (eds. T. Ochiai et al), Progress in Mathematics, vol.308(2015), 343-351, Birkhauser. 10.1007/978-3-319-11523-8_12

Akito Futaki, Kota Hattori and Hikaru Yamamoto, Self-similar solutions to the mean curvature flows on Riemannian cone manifolds and special Lagrangians on toric Calabi-Yau cones, Osaka J. Math., 51(2014), 1053-1079.

<http://projecteuclid.org/euclid.ojm/1414761911>

[学会発表](計 10 件)

Akito Futaki, Volume minimization principle for conformally Kähler Einstein-Maxwell metrics, The 7-th International Workshop on Differential Geometry, Fukuoka University, Japan, March 23--27, 2017.

Akito Futaki, Volume minimization principle for KRS, SE and cKEM, International Conference on Differential Geometry, University of Macau, China, December 14, 2016.

Akito Futaki, Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence, 11th Pacific Rim Complex Geometry Conference, University of Science and Technology of China, Hefei, China, July 28, 2016.

Akito Futaki, Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence, Kähler Geometry, Einstein Metrics, and Generalizations, MSRI, Berkeley, California, March 21-25, 2016.

Akito Futaki, Introduction to K-stability in Kähler geometry I, II, Berkeley-Tokyo Winter School, University of California at Berkeley, February 17-18, 2016.

Akito Futaki, Fano-Ricci limit spaces and spectral convergence, 2015 Taipei Conference on Complex Geometry, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan, December 19--23, 2015.

Akito Futaki, Weighted Laplacian on real and complex complete metric measure spaces, Recent Advances in Kähler Geometry, Vanderbilt University, Nashville, May 18-22, 2015.

二木昭人, Weighted Laplacians on real

and complex complete metric measure spaces, 複素解析幾何セミナー, 東京大学.

二木昭人, Weighted Laplacians on real and complex complete metric measure spaces, 満淵俊樹教授退職記念小研究会, 大阪大学, 2015年3月12日.

二木昭人, Kähler Geometry and GIT stability, 京都大学談話会, 京都大学, 2015年1月21日

〔図書〕(計3件)

Akito Futaki, Reiko Miyaoka, Zizhou Tang and Weiping Zhang (editors), Geometry and topology of manifolds. Proceedings of the 10th China-Japan Geometry Conference held in Shanghai, September 2014. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 154. Springer, [Tokyo], 2016. xii+348 pp. DOI: 10.1007/978-4-431-56021-0

砂田利一・石井仁司・平田典子・二木昭人・森真 監訳, プリンストン 数学大全 B5 / 1192 ページ / 2015年11月20日, 朝倉書店.

二木昭人, ベクトル解析の力「巻頭言」, 数理科学 2014年8月号 No.614.

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~afutaki/welcome-jtoday.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

二木昭人 (Akito Futaki)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号: 90143247

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号:

(4) 研究協力者

()