様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １２ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2017
課題番号：２６６１００１７

研究課題名（和文）量子統計力学による距離空間のモジュライの構成、その特異性と偏極

研究課題名（英文）Construction, singularities and porlarlization of moduli space of metric spaces via Quantum statistical mechanics

研究代表者
大津　幸男（OTSU, Yukio）

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：８０２３３１７０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：ランダム離散化の方法で，適当な条件をみたすコンパクトリーマン多様体やアレクサンドロフ空間のネットによる離散近似を与え，離散ラプラシアンから導かれる振動のハミルトニアンを構成し，量子統計力学を構成した．その熱力学的関数の摂動展開を求め，それを使って空間とネットの組全体にリーマン計量の族を導入し，粗モジュライ空間といえる構造を構成した．そして，それとグロモフ・ハウスドルフ距離，古典的モジュライ空間との関係を調べた．

研究成果の概要（英文）：By the method of random discretization we considered the discrete Laplacian of nets on a compact Riemannian manifold or Alexandorv space. Using the Laplacian we constructed the Hamiltonian ofvibrations on net and its quantum statistical mechanics. By perturbation expansion of its thermodynamical functions we introduced a family of the Riemannian metrics on the bulk moduli space of the pairs of space and net. Then we studied its relation to the Gromov-Hausdorff distance and several classical moduli spaces.

研究分野： Differential geometry

キーワード： Differential geometry　モジュライ空間　Gromov-Hausdorff 距離　量子統計力学

１．研究開始当初の背景
（１）対称性の高い幾何学的空間全体をそれ自体空間と見なすモジュライ空間の理論は，ガウス，リーマン，ホッジなどにより研究が始められ,それ自体の幾何学がまた興味深い数学を生み出しており，現代数学の発展の真の中心の対象であり続けている．例えば，アーベル多様体の周期行列はリーマン関係式を満たし，偏極という新しい整数の組が自然に現れ，それ付きのアーベル多様体のモジュライ空間の理論が構成されている．

（２）それとはまったく別に，グロモフはコンパクト距離空間全体にハウスドルフ距離という距離を導入し，非常に弱い空間の制限の下で前コンパクト性を示し，更にリーマン多様体の列の収束等を考察し，リーマン多様体の収束定理，崩壊する場合の構造定理等を得た．それによりリーマン幾何に革命的進歩をもたらした．

（３）またそれらとも全く別に，無限大の自由度を持つ量子論である場の量子論は，経路積分，摂動展開（ファインマングラフ），ウィック回転（逆温度），超対称性，相転移などの手法・概念により著しい発展を遂げていた．ここで摂動展開を空間の変形とみなすと，モジュライ理論との関連が垣間見えてくる．
　ただし，数学的には，場の量子論は繰り込みを含めた様々な困難を含んでいることもよく知れていて，数理物理学では盛んにこれらの理論の数学化が研究されていた．

（４）また，有限要素法，グラフ理論等の応用数学，物理の格子場の理論等では，離散近似による（連続な）微分方程式の解の近似が，計算機による実用の観点からも，様々に研究されてきた．
　その他確率論でも，大数の法則を真の平均の独立確率変数の算術平均による近似理論と見なすことが出来る．

（５）ただし，これらは複素幾何，代数幾何，リーマン幾何，幾何解析．場の量子論，統計力学，数理物理，応用数学と異なる分野で，完全に別々に高度に発達してきたせいもあり，各分野での言葉は完全に違い，研究方法のも異なっている．そのため全ての分野を見通して研究することは著しく困難であり，これらの研究を総合して研究することを著しく困難にしていた．

２．研究の目的
　上記のような古典的なモジュライ空間の理論を，ランダム離散化と量子統計力学の方法で，リーマン多様体・距離空間全体のグロモフ・ハウスドルフ幾何学と融合した新しいモジュライ空間の理論を作るというのがこの研究の目的である．更に，古典的なモジュライ空間と新しく作られた粗モジュライ空間との関係を記述する方法を探し，対称性の高い空間のモジュライ空間がどの様に埋め込まれているか，逆にみると，古典的モジュライ空間がどのように分離しているかを見直すこともこの研究の目的であった．

３．研究の方法
（１）まず，ランダム離散化の方法で適当な条件をみたす空間全体の離散近似を与え，粗いモジュライ空間を構成する．まず，虚時間を使った場の量子論である量子統計力学の手法で，数学的に簡単な離散ハミルトニアンを構成し，量子化により量子統計力学を構成する．複雑なモデルは多くの数学的困難を導くので，なるべく簡単なモデルでありつつ，十分の情報を抽出できるハミルトニアンを使うのがポイントである．その熱力学的関数の摂動展開を求める．
　これらの構成の数学的整合性を示すことが技術的問題であり，ファインマン不等式を使い，空間とネットの組全体に距離ではなく計量を導入することを目標とした，

（２）ほとんどの空間同士はネットをどのように取っても変形出来ないことは代数的不変量が連続変形で不変であることから自明である．つまり，粗モジュライ空間は連結成分に分かれていて，それらの距離はあっても無限大である．しかし，ハウスドルフ距離の利点は任意のコンパクト距離空間に同士に対して有限であることであった．
　そこで，我々の方法で，変形出来ない空間同士の近さを図ることを考える．我々は量子統計力学を考察しているで，理論は温度というパラメータを自然に持っていることに注意する．関連のない２つの量子系も温度が低いとトンネル効果で相関が起こると予想されるので，そこで二つの連結成分の間の距離に当たるものを，このような相関が切れる相転移温度として定義することを問題にする．また，（２）で求めた量とグロモフのハウスドルフ距離の関連を導くことを目標とした．

（３）（１）で述べたようにこの設定中で，粗モジュライの中に対称性の高い空間のモジュライ空間があると，まず粗いモジュライの中で対称性の高い空間のモジュライはその対称性のため粗モジュライの特異点集合となると考えられる．その対称性の高い空間のモジュライ空間には偏極に当たる構造の自由度が表れ，その偏極付きモジュライ空間の和集合から粗いモジュライ空間の特異点集合への写像があるものと予想されるので，そのような構造を探ることも目的であった．

４．研究成果
（１）n 次元コンパクトリーマン多様体，あるいはアレクサンドロフ空間 X の N 個の点の順序付きの組（N ネット）$\Lambda=\{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$を固定すると，元の空間は距離空間（$X,d$）なの

でそれぞれの点の間の距離を表す N次正方行列($d(v_i,v_j)$) が作られる．そのデータからある小さな距離（相互作用距離）r >0 以下の点を結んだグラフを構成し，$d(v_i,v_j)$<r のとき a_{ij}=1, 他を a_{ij}=0 と置き，$d_i= a_{i1}+\ldots+a_{iN}$ とするとき．次の N次対称行列

$$L_{(X,\Lambda)}=\frac{1}{r^{n+2}}\left(d_i\delta_{ij}-a_{ij}\right)$$

を離散ラプラシアンと呼ぶことにする．ここで$(f_i),(g_i)$を N次ベクトルとするとき内積を$((f_i),(g_i))_N$=$\sum f_i g_i/N$で定めると，この内積で L は非負定値実対称行列と見ることが出来る．ここで，点の数 Nを増やし，相互作用距離を小さくしたときに意味のある極限（連続ラプラシアン）に収束するようにスケール変換を選んだ．

元の空間には測度がるので，N ネット全体の空間に積測度を使って確率測度を導入し，ネットの数 Nを無限に増やしたときのランダムなネットの離散ラプラシアンの極限を確率論的に構成した．つまり，大数の法則として，意味を持つランダムなネットのラプラシアンの列を構成し，特に，連続なラプラシアンのスペクトル，固有関数に収束する条件を調べた．

（２）（１）では空間を固定して考えていたが，全部の空間の上の条件をみたす体積を１に正規化した空間とそのネット全体を同時に考える．ただし，全ての空間で同時に（１）の構成を行うため若干の空間の制限を与える必要がある．例えば曲率に関する一様な下からの評価などである．そのような空間全体を$\mathfrak{X}$と表し，空間と Nネットの組を$\mathfrak{X}^N$と表すと，各ネット$(X,\Lambda)\in\mathfrak{X}^N$に対して，同じ空間 $(\mathbb{R}^N,(,)_N)$の実対称作用素 L を対応させることになる．つまり，ネットの情報の冗長性のため，反って同じ空間列の作用素の列が得られ，それらの比較ができることになる．

（１）で構成した離散ラプラシアンのスペクトルをもとに量子統計力学を構成した．そのためにネット上の調和振動子を離散ラプラシアンを使って構成した．量子化では一般化座標と一般化運動量のハミルトニアンを用いて作られる． L は正定値実対称行列なので固有値は

$$0=\lambda_0\le\lambda_1\le\cdots\le\lambda_{N-1}$$

の様になるが，ランダムなネットの場合$\lambda_0<\lambda_1$として良い．これらの固有ベクトル$\boldsymbol{e}_\tau=(e_{i\tau})$をとり，$\mathbb{R}^N$の標準的な座標$(f_i)$に対して一般化座標 $q_\tau=\frac{1}{N}\sum_{\tau=1}^{N-1}e_{i\tau}f_i$とその共役的な一般化運動量$p_\tau$を導入し，

$$H\big((p_\tau),(q_\tau)\big)=\frac{1}{2}\sum_{\tau=1}^{N-1}(p_\tau^2+\lambda_\tau q_\tau^2)$$

で定義される振動に当たるハミルトニアンを考察した．この系の量子化を考える考えるため，$\mathbb{R}^{N-1}$の上の急減少関数の作る関数空間を考え，L^2内積に関して完備化しヒルベルト空間を構成した．次にシュレディンガーの量子化，つまり，CCR によるボソンの量子力学を構成し，虚時間でパラメータ付けられた平衡量子統計力学の密度行列，分配関数をあたえ，経路積分表示を求めた．ここでは固有関数による座標を使っており，この取り方に依存しているので標準的座標による表示も得た．したがって，この理論の列は固有関数の取り方によらず定まっている．その後 Nを無限にした極限での熱力学的関数の収束を調べた．

（３）（２）でも指摘したようにハミルトニアン，及び量子化されたハミルトニアンは Nを止める毎に同じ，N次元内積空間．及びその上のヒルベルト空間に作用しているので，元の空間とネットが変わっても比較可能である．そこで Nネットの組からこのような N次元内積空間，及びヒルベルト空間の作用素の空間への写像の像の摂動，つまりハミルトニアンの摂動を考察することができ，空間の摂動とも見なすことができる．

このような視点から，まず，ファインマンの不等式の考察を行った．この不等式は自由エネルギー（分配関数の対数）があらゆるハミルトニアンの摂動で凸関数になるというものである．特に我々の設定では自然なアファイン構造が入っているのでこれに関する摂動を調べることができる．自由エネルギーが微分可能とすると，２回摂動展開を求めるとヘッシアンが非負定値になり，無限次限リーマン計量の様なもの列が得られる．これらを像に制限したものが最初に述べた粗モジュライ空間である．そのファインマンダイヤグラムによる展開は松原（温度）グリーン関数による二次のものになり，その表示も求めた． Nが無限に飛んだときの収束と空間の連続変形の関係を調べた．

同じ空間でのネットの取り替えは空間の変形は導かないので，与えられた空間が変形できるための必要条件は，この自明な変形の方向に与えられた計量で直交した接空間である．ただし，これが有界な変形の初期ベクトルの方向であるとはいえ，真の変形空間，つまり，与えられたネットのどの方向に真の変形があるか，もしあるとしてどれだけの自由度があるかのについては未だ全貌はつかめていない．

（４）研究方法の段でも述べたが，連続変形が不可能な空間同士を我々の方法の拡張として調べた．平衡量子統計力学では虚時間が温度の逆数であるこはよく知れているが，２つの量子系は温度が低いときは相関をもつことが知られているので，どのような温度でも摂動が無限に発散しない場合と，ある温度で相関が切れる相転移点がある場合に場合分けした．

また，その連結成分の境界の様子は空間の

崩壊を記述してる．ただし，我々の対象は体積を１に正規化するので，境界は無限遠に表れる次元の低い粗いモジュライ空間の一部に張り付いている．この様な無限遠点での構造を調べるのも考察の対象であった．

（５）対称性の高い多様体は様々な良い幾何構造を持つている．例えばスピン多様体はディラック作用素のような幾何構造を持ち，ディラック作用素はラプラシアンのある種の平方根になっている．これはフェルミオンとボソンの関係に対応し，それらの統計理論の間には超対称性の様な関係があると予測されており，そのよう観点から指数定理の証明も与えられている．我々はこのような対称性の高い空間の統計力学を構成することも試みたが，残念ながら未だ成功していない．

　以上，最初の計画した数学的厳密化についてはそれなりに成功したが，ハウスドルフ距離との融合や完全な変形理論の構築には未だ道半ばである．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 0 件）

〔学会発表〕（計 1 件）
Y.Otsu, Space-time approach to the deformation of random nets,九大幾何学セミナー,2015 年 3 月

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
大津　幸男　(OTSU　Yukio)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：80233170