様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 ２３ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2016
課題番号：２６６１００２２
研究課題名（和文）無限次元群に基づく不変式論としての繰り込み概念

研究課題名（英文）Study on Renormalization as Invariant Theory under Infinite-dimensional Groups

研究代表者
梅田　亨（UMEDA, Toru）

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：００１７６７２８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：繰り込み概念における基礎的な研究を行った．その中には，カペリ型恒等式の新たな研究，ベル多項式と無限変数の微分作用素，普遍包絡環の研究が含まれる．これらは，1変数のの一般座標変換の群で不変な量の基礎的研究に必要なものであり，群論的な視点及び組合せ論的な視点の交叉した場所にある．特にベル多項式の性質を無限変数の微分作用素を用いて調べることは，古典的な不変式論の「基本形式」の用い方と並行であり，普遍包絡環のような非可換環での計算を組織的に行なう上で明快な道具を供給する．

研究成果の概要（英文）：For the renormalization from the invariant-theoretic point of view, we studied some basic facts on the Capelli identities, Bell polynomials and differential operator of infinite variables, and universal enveloping algebras.These are necessary for the study of the infinite dimensional group of general coordinate transformation, and for its invariants. Their importance is that they are related both group theoretic and combinatorial points of view. In particular, the study on the Bell polynomials using the differential operators of infinite variables are similar to classical invariant theoy in the sense of the featuring "ground form". This will be useful in the calculation of non-commuting variables like in the universal enveloping algebras.

研究分野：不変式論

キーワード：Capelli 型恒等式　Bell 多項式　普遍包絡環

１． 研究開始当初の背景

かつてオイラーの五角数定理を無限次行列のトレースに関するアノマリーと捉え直したが，それに不変式論的に積極的な意味を賦与し，不変微分作用素という非可換世界での労使器の拡張ができるのではないかと研究を進めてきた．本研究はその延長上に位置づけられる．

トレースとはもちろん典型的な不変式で，しかし，それを巡ってアノマリーが生じる過程は無限サイズの行列を扱うからである．全く同様に，真空偏極に関係したリー環の中心拡大が現われる機構も捉えられる．さらに，メタプレクティック群の実現に際し，無限次元のベクトル空間の約半分無限次元の部分ベクトル空間が，ディラックの海の真空に対応する．このように，無限自由度を通じて，困難とともに興味深い現象がさまざまに生じる．ディラックはかつて，同様な設定の下に結合法則の破れ(アノマリー)を通じて無限大の困難を解消する試みをなした．実は，このディラックのアノマリーこそ，オイラーの五角数定理の背景にあったのである．このことは，以前の研究で判っていたが，これをさらに一歩推し進める形で無限大の困難に迫れるのではないかという希望を抱いた．

２． 研究の目的

物理学，特に場の理論と言う無限自由度の世界では，自然な定式化の下で計算したい量が無限大に発散するという困難が生じる．しかし，量子電気力学(QED)を成功例とするように「繰り込み」操作が可能となる場合がある．このような現象に無限次元群対称性による不変式論の視点を導入し，特に第一基本定理(基本不変式の把握)によって，繰り込み概念の機構にあらたな説明を与えたい．

Dual Pair 理論は不変式論の第一基本定理を双対定理と読み替え，かつまた，その双対性の具体的記述として非可換変数を含む Capelli 型恒等式として捉えられる．この非可換変数を扱う技法に加え，無限積と無限和を結ぶ等式の背後にあるアノマリーの解明の技術を導入し，上記の問題に迫るというのが，基本的発想である．

非可換性が無限大の程度を弱めるというのは，量子力学の黎明期以来の基本的アディアであるが，不変性と非可換性を融合することで，強力かつ有用な技法を開発することを目指す．

このように従来研究してきた，問題と技法を用いて，群論的視点から，無限大を統制するのが本研究の発想と目的である．

３．研究の方法

素朴に考えた無限大という発散を解消する数学的手段の一つに「真空偏極」というものがある．例えば無限次元群(ループ群)の中心拡大に関する Gelfand-Fuchs 理論，Kac-Moody 代数とその表現，1+1 場の理論，そしてそれらを無限可積分系に用いた佐藤(京都)学派のソリトン理論などで基本的なモノである．これは，一方，より古典的な「留数」概念でもある．通常の複素函数論に現われるものから離れて，純粋に打数的な扱いをする必然も生じた．それは Dedekind-Weber を源流として Chevalley の代数函数論に始まるアデールの扱いを経て，J. Tate (及び、岩沢健吉)の簡明な定式化である．とくに線状位相(linear topology)の概念を用いれば，局所コンパクトという枠組みを超えた一般的な代数の世界になる．それはまた，佐藤理論(ソリトン理論)でも援用されている．

複素函数論的と代数的の二面性をもつ「留数」を函数解析から捉えたのが Toeplitz 作用素の指数定理である．留数は，また，一般座標変換の群という無限次元の群で不変な量である．このように様々な由来をもつ１次元理論(Riemann 面，代数函数体，Toeplitz 作用素)を群論的視点から解析する．

高次元理論に直接向かうのは，この困難の長い歴史からみても，一朝一夕にできるものではない．我々は，少なくとも現実的に可能な 1 次元理論で，方法論の確かさを試し，それをもって高次元に当たるという戦略を立てた．

高次元が困難であるとしても，手がかりがないわけではない．先に言及した Toeplitz 作用素について，Douglous-Howe の２次元理論がある．また，佐藤のソリトン理論も高次元化の困難を抱えてきた．もともと，佐藤超函数の理論では高次元化をコホモロジー的に捉えたのが成功の鍵であったから，我々の場合にも，それがヒントになると考えられる．しかも，Douglous-Howe の理論でも，その方向性が示唆される．

ほかのヒントは，不変式論的な観点にある．例えば，環論的に１次元の Dedekind 環にとどまらない不変量として，多変数でも判別式や終結式が直接定義できる．これは１次元の上に一般の係数を持った環だと捉えると，素朴には(根に当たるものが連続して動くか

ら)無限大が生じるが，全く別の観点から，自然な計算方法が得られている．これは，先ほど述べた「留数」についても，見方によっては，無限大を孕んでいるが，別の見方ではそれが表立たないということと似ている．

不変量に注目するのは，このような立場も踏まえてのことである．つまり，判別式や終結式という典型的な不変式は，幾何学的な由来と同時に計算的なルーツを有するので，異なった視点の渡り歩きが可能となるわけである．

さらにもう一つ，試みる価値があると思われるのは，無限次元群に於ける modular 函数(左右の不変測度の比)の役割の詳しい分析である．有限次元であれば，典型的なものでは，これが恒等的に１であり，そのような群に対しては基本不変式の生成系の有限性が成り立つ．有限次元でも，この基本系の有限性が成り立たないような種類の群は，modular 函数が１とは限らない．不変式論的立場から，この現象を捉えるのは意味のあることだと思われる．

４．研究成果

１変数形式的冪級数に関する一般座標変換に関係して，Bell 多項式および関係する二項型多項式列を，無限変数の微分作用素をもちいて，ある種の明快さをもった扱いをすることに成功した．同時にそれは組合せ論定な意味も持っている(2015 年，口頭発表)．これはまた，高次の(対称)微分とも関わっているが，対称微分自体は，佐藤のソリトン理論の高次元化に際して，τ函数を与えるのに有用な概念であった(野海正俊)

不変式論に関係して，既約でない表現に付随した Capelli 型恒等式，また，群行列式に付随した Capelli 型恒等式の研究を推進した．(2015 口頭発表，及び研究会の報告集として編まれた論文集に論文掲載予定)．群行列式に関わる研究は，従来の，土台の空間が既約である場合の Capelli 恒等式と比べて，遥かに複雑であり，そのままでは有用な非可換行列式を見出すのが難しい．それでも，一旦，既約分解を通じて，古典的な Capelli 恒等式を援用することができる訳だが，その場合には，Schur の直交関係式が効果的に使われる．既約でない場合のもう少し，直接的できれいな結果は、一つの既約表現の重複の場合で，例えば全行列環の正則表現を扱うものだが，非自明な Capelli 型恒等式は，かなり面倒な交換関係を帰納的に見易く解きほぐしていかなくてはならない．同様に，四元数環(quaternion)や八元数環(octonion)での特別な生成元を使った正則表現に付随する Capelli 型恒等式が存在する(An Huang)ので，更に一般の(例えば，一般の体上の central simple algebra)に関わる Capelli 型恒等式も期待される．問題は，その正則表現のために用いる基底の選び方だが，先ほどの全行列環の場合では，実際には，選び方によらず，うまい rho-shift を入れることで結果が得られたが，証明としては，片方の選び方では明らかであるのに対し，逆転した選び方では証明が複雑である．そのような差がみられたので，より一般の環の場合では，予測が着きにくい．

なお，この研究では，以前， Wronski 関係式の研究で用いた，ボソンとフェルミオンの混じった，多項式係数の微分形式環を母函数の形式変数環とする代数と，扱いがよく似ている点などにも注目すべきだと思う．

結合代数を交換子積で Lie 環と看做したものの普遍包絡環の記述，およびその Cepelli 型恒等式の例(2017 口頭発表)．これは，上に述べた，群行列式に付随する Capelli 型恒等式の扱いにヒントを得て，九州大学大学院生だった山口尚哉君が書いた学位論文(2017)に対するコメントである．彼の結果と私の群行列式型 Capelli 恒等式をつなぐ視点をはっきりさせたものである．

ベル多項式と二項型多項式の枠を超えたものに，多項式にならないスターリング数に関係した数列がある．これに関しても，デルタ作用素を作って，非自明な再帰関係を見つけた(一部は雑誌『数学セミナー』に連載記事で発表)．組合せ論と差分の関係を，非可換変数を媒介としてさまざまに論じるものであるが，基本的な姿勢は，本研究のテーマである，対称性(群論的視点)と非可換(微分や差分)作用素を用いる点で共通している．それが，有用であるので，考え方を多くの読者に広める目的をもって，このような解説をつづけている．

学術的な書物としてゲルファントの『多変数超幾何函数論』と『徹底入門 解析学』の二冊を上梓した．『多変数超幾何函数論』では，超幾何函数と不変式，組合せ論等々の極めて興味深いつながりが指摘されている．『徹底入門 解析学』では Fourier 級数論の本質やルベーグ積分論の従来とはやや異なった導入も含め，無限を扱う技法を述べた．その一部は最初に述べたようなアノマリーにも深く関係して，発散級数の総和法やデルタ函数の扱いにも及ぶ．また，超函数も，Schwarts distribution のみならず佐藤超函数にも及び，それら通じて Fourier 級数論そのものが，特殊な和の公式として変容するさまが明らかになる．これは最初に述べたような，例え

ば「留数」が複素解析的だけでなく，代数的にも扱いうるという類似でもあり，実は本質を共有する例示である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

T. Umeda: Remarks on the Capelli identities for reduclbe modules, "Representation theory, Special Functions and Painleve Equations", Advanced Studies in Pure Mathematics (in print), 査読有

〔学会発表〕（計　4　件）

梅田亨
Remarks on the Capelli identities for reducible modules
数理解析研究所研究集会``Representation Theory, Special function and Painleve equation",
京都大学
2015.3.15

梅田亨
Bell 多項式と微分作用素,
研究集会``不変性と双対性",
鹿児島大学
2015.9.7
梅田亨
普遍包絡環に関する注意,
研究集会``特殊函数と対称性".
九州大学,
2017.2.17

梅田亨
二項係数について
研究集会``特殊函数と対称性"
九州大学
2017.2.17,

〔図書〕（計　2　件）

『超幾何函数論』　日本評論社
2016.6.15
(吉沢尚明，野海正俊，梅田亨
若山正人）共著
133 pages

梅田亨
『徹底入門 解析学』　日本評論社
2017.2.25,
267 pages

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

なし

６．研究組織

(1)研究代表者

梅田亨(UMEDA Toru),
京都大学・大学院理学研究科・准教授,
研究者番号: 00176728

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

野海正俊(NOUMI Masatoshi),
神戸大学・大学院理学研究科・教授,
研究者番号：80164672