2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号： １４３０１
研究種目： 挑戦的萌芽研究
研究期間： 2014～2015
課題番号： ２６６１００２３

研究課題名（和文）測度・距離空間上の解析学の展開に向けてーCheeger 理論とフラクタル

研究課題名（英文）Towerd analysis on metric-measure spaces-- Cheeger theory and fractals

研究代表者
木上　淳（Kigami, Jun）

京都大学・情報学研究科・教授

研究者番号：９０２０２０３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：測度・距離空間上の解析学の展開に向けて、その基礎となる位相空間上の距離と測度に関する bi-Lipschitz 同値、volume doubling property, quasisymmetry, Ahlfors 正則性などの諸性質を、空間の partition とそれに付随する gauge function の観点から統一的に扱う理論の構築を行った。またその理論を用いて、測度と距離の間の bi-Lipshitz 性が Ahlfors 正則と同値であることを示した。

研究成果の概要（英文）：To study analysis on metric-measure spaces, we have investigated important properties of metrics and measures on topological space such as bi-Lipshitz equivalence, volume doubling property, quasisymmetry and Ahlfors regularity form the view point of partitions and associated gauge functions. In particular, we have shown that bi-Lipshitz property between a measure and a metric as gauge functions is equivalent to the Ahlfors regularity between a measure and a metric.

研究分野： 基礎解析一般（含関数空間論・応用解析の基礎）

キーワード： 解析学　フラクタル　測度論リーマン構造　測度・距離空間　Dirichlet form　partition　quasisymmetry　volume doubling property

１．研究開始当初の背景

カオス・フラクタルなどの理論の発展により、物理現象を捉えるべき空間は単なるユークリッド空間（の領域）や多様体から、自己相似集合、パーコレーションなどの確率モデルの臨界点に現われるクラスターなどの複雑な空間へと広がってきた。このような複雑な空間の上での物理現象を記述するためには、ユークリッド空間や多様体上で発展してきた解析学・幾何学をそれらの空間の上に拡張する必要がある。具体的には、空間上の物質の流れを記述するため、その空間上の関数の空間方向の自然な「微分」（幾何学的には「接空間」の概念）を定義しなければならない。そのために、まず「どのくらい”良い”測度・距離空間なら「微分」という概念が定義可能なのか？」を見極めることが必要となる。その後に（あるいはそれと同時に）測度・距離空間上に微分方程式論・調和関数論・確率過程論などの解析学を構成し、幾何学的性質との関係を明らかにしつつ、熱方程式、波動方程式などの物理現象を記述する方程式の理論を展開することになる。このような測度・距離空間上の解析学の研究は、測度論的可微分構造(Cheeger 理論) とフラクタル上の解析学という２つの有力な試みによって、ようやく端緒に就いたばかりであった。

２．研究の目的

解析学」とは何なのだろう？ 与えられた空間の上で「解析」を行うというのは、どういうことなのだろう？ ユークリッド空間や多様体などの上では調和解析、ポテンシャル論、実解析、微分方程式論などの豊富な解析学が展開されている。そのような豊富な解析学は空間にどのような性質があれば可能になるのだろう？このような疑問には完全な答えは存在しないであろうし、さらには何をもって答えとすべきか自体が明確ではない。それでもなお、本研究ではこの疑問に対する答えに少しでも近づくべく、測度・距離空間上に解析学を展開する試みを行う。特に、その第一歩として、Cheeger による測度論的可微分構造の理論とフラクタル上の解析学の関わりを明らかにする。

さらに詳しく言えば、現在、測度・距離空間（距離空間とその上の測度を組にしたもの）上の解析学の展開に向けて、測度論的可微分構造（Cheeger 理論）とフラクタル上の解析学という２つの独立した試みがある。測度論的可微分構造の理論は、Cheeger による Rademacher の定理の一般の距離空間への拡張に始まる。Cheeger は「volume doubling+ Poincare 不等式」の仮定の基で、Lipschitz 連続な関数は殆ど至る所で「微分可能」でありその「微分」は有限次元の「接空間」をなすことを示した。この Cheeger 理論はその後の研究により、Heisenberg 群や Ricci 曲率が下から有界で、直径が有界なリーマン多様体の列の Gromov-Hausdorff の意味の極限に対して適用可能であることが示された。

一方、フラクラル上の解析学は Sierpinski gasket (SG) 上への Brown 運動の構成を嚆矢として、自己相似集合、Julia 集合, random fractal 等の上に展開されてきた。基本的な方法は、対象を離散近似して、ある種の繰り込み方程式の不動点を見つけ、その不動点から拡散過程などを生成する Dirichlet form (ユークリッド空間の Dirichlet 積分の一般化）を構成することであった。多くの場合、フラクタル上の Dirichlet form の定義域には定数以外の Lipschitz 連続な関数は含まれず、Lipschitz 連続な関数が主役である Cheeger 理論の場合とは（見かけ上は）大きな本質的隔たりがある。

この２つの本質的に異なるように見える理論の現在知られている唯一の接点は SG 上の測度論的リーマン構造である。（上図参照）楠岡によって SG 上の Dirichlet form が殆ど至る所で定義されたリーマン構造（の類

似物）の積分として表現されることが見いだされた。後に対応する測地線距離が構成され、その距離の基での SG の幾何学的実現として調和 SG が定義された。最近、日野によって測度論的リーマン構造は、強局所的な Dirichlet form の範疇で一般化されつつある。本研究の目的は、測度・距離空間上において２つの理論を包含する豊富な解析学を展開するという最終目標に向けて、その交わりを測度論的リーマン構造という観点から Julia　集合や一般の自己相似集合などに拡張し、そのことを通じて２つの理論の関係を明らかにすることである。

３．研究の方法

主な研究方法は、

(1)　文献による現在までの関連分野の研究成果の調査

(2)　海外の研究集会などへの出席による最新の研究動向の調査および関係分野の研究者との議論

(3)　海外からの関係分野の研究者を招聘し、議論を行うこと

の３点である。本研究ではとくに、Riemann 球面上の分岐的被覆の Thurston 理論の研究の第一人者である D. Meyer 教授を招聘し、分岐的被覆に付随する Riemann 球面の partition について議論を行った。

４．研究成果

本研究では主に解析学の舞台となる位相空間上の距離と測度の関係について研究を行い、Poincare 不等式やそこから得られる測度論的微分構造と Dirichlet 形式から得られる測度論的 Riemann 構造の関係について考察するための、土台を整備した。

第１歩としてコンパクトな距離空間に partition という概念を導入した。

Partition　は空間をまず幾つかの有限の部分集合の和に分割し、更にその部分集合を有限個の部分集合に 分割するという操作を繰り返して得られる構造で、部分集合たちが無限の入れ子構造を成し、空間の各点は入れ子になった無限の部分集合の極限として表現される。形式的には、無限 tree (ループを含まない無限グラフ）から空間のコンパクト集合の全体への tree の構造を保存する写像である。このような partition は、

・自己相似集合に於ける coding map

・力学系に於ける Markov partition

・Canon による組み合わせ論的 Riemann map の理論における Shingling

・空間の finite division の理論

のような場合には自然に存在することが知られていた。本研究では、これらを統一的に扱うために、patition という概念を導入して、その基本的な性質を整備した。

この partition という概念を準備した上で、次に partition をなす一つ一つの部分集合の大きさをあたえる gauge function という概念を導入した。空間に距離 d が与えられた場合は、partition　をなすそれぞれの部分集合には d による直径がその ” 大きさ ” を与える。また、空間に測度 m が与えられたときには、m による partition　をなす部分集合の測度はその集合の ” 大きさ ” を与える。このようなこのような距離あるいは測度から決まる集合の ”　大きさ ” を一般化したものが gauge function という概念である。とくに距離 d に対して d　に関する集合の直径から決まる gauge function を距離 d から決まる gauge function と呼ぶ。また測度 m による集合の測度から決まる gaugefunction を測度 m から決まる gauge function と呼ぶ。gauge function という範疇には距離と測度の双方が含まれている。一般の gaugefunction に対しては対応する距離や測度が存在するとは限らない。しかしながら、gaugefunction

から、中心と半径を指定した”球”に相当する近傍系（pre-balls ）とその球を導く距離もどき(pre-metric) を定義することはできる。このとき、最初の疑問はこの距離もどきが本当の距離と双 Lipschitz 同値になる（「gauge function に adapted な距離が存在する。」という）ための必要十分な条件を調べることである。本研究では一般の gauge function に対して adapted な距離が存在するための必要十分条件の一つが、「２つの集合がある partition のレベルで離れていれば、partition の細かいレベルでは、その２つの集 その２つの集合を結ぶのに必要な集合の個数は一様に大きくなる。」であることを証明した。さらにこの、adapted な metric という概念は、無限の双曲的なグラフの理論や、Bonk-Meyer による有限分岐的な Riemann 面の被覆の理論に現れる visual metric に対応することも証明した。またこの結果の応用として、正方形から縦と横が正方形の辺と平行な無限個の長方形を除いてできる正方形の部分集合について、自然な gauge function に対してユークリッドの距離が adapted で有るための必要十分条件 は、取り除く長方形の縦と横の比が一様に有界であることを示した。

次に本研究では gauge function の集合に双 Lipschitz 同値という概念を導入した。２つの gauge function が双 Lipschitz 同値であるとは、２つの gauge function の値の比が（上と下から）一様に収まることである。本研究では、この gauge function の間の Lipschitz 同値が、

・２つの測度から来る gauge functions の間では、測度として絶対連続でありその Radon-Nykodim 微分（上と下から）が有界になることと

・測度から来る gauge function と距離から来る gauge function の間では、測度が距離に対して Ahlfors 正則になる(つまり半径 r の球の測度が r の一定のべきで一様に評価されるということ）ことと

・２つの距離から来る gauge function の間では、距離としての双 Lipschitz 同値性と

・gauge function と距離から来る gauge function の間では距離が gauge function に対して adapted であることと

それぞれ同値になることを適当な仮定の下で明らかにした。

さらに、gauge function の間の双 Lipschitz 性より弱い同値関係として２つの gauge function が 互いに gentle であるという概念を導入した。その上で、入れ子になっている partition を構成する２つの集合の大きさの比が（上と下から）一様に有界であるという gaugefunction の指数性という概念を導入したとき、指数的な gauge function の間では

・gauge function に対して adapted な距離が存在するという性質や

・gauge function から定義される”球もどき”たちの穴の大きさが一様であるという性質（gauge function が thick であるという）さらに

・partition をなす部分集合に対して gauge function の大きさが大体等しい近隣の部分集合の数が一様に有界であるという性質（uniformly finite 性）は、この gentle 同値によって不変であることを証明した。

さらに、この結果を用いて指数的な gauge function の間の gentle 同値は、

・測度から来る gauge function と距離から来る gauge function の間の関係としては測度が距離に対して volume doubling property をもつという性質と

・２つの距離から来る gauge function の間の関係としては２つの距離 quasisymmetric であるという性質とそれぞれ同値になることを適当な仮定の下で証明した。

全体として本研究では測度論的微分構造の理論（Cheeger 理論）と Dirichlet 形式からくる測度論的 Riemann 構造の理論を統合に向けた 土台を確立するために、空間における測度と距離の概念について partition をその上の gauge function の立場から再構成を行った。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計３件）
① Jun Kigami, Partition of metrizable spaces by trees, volume doubling measures and quasisymmetry, AMS Sectional Meeting 1114, 2015 年 10 月 24 日, California State University, Fullerton, CA, USA
② Jun Kigami, Self-similar sets as quotients of shifts, 5th Cornell Conference on Analysis, Probability and Mathematical Physics on Fractals, 2014 年 6 月 11 日、Cornell University, Ithaca, NY, USA
③ Jun Kigami, Self-similar sets as quotients of shifts, New Directions in Fractal Geometry, 2014 年 11 月 24 日, Australian National University, Canberra, Australia

６．研究組織
(1) 研究代表者
木上　淳（Kigami, Jun ）
京都大学大学院情報学研究科・教授
研究者番号：90202035
(3) 連携研究者
熊谷　隆（Kumagai, Takashi ）
京都大学数理解析研究所・教授
研究者番号：90234509
日野　正訓（Hino, Masanori）
大阪大学大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号：40303888
梶野　直孝（Kajino, Naotaka）
神戸大学大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90700352