様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月　 2 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2016
課題番号：２６６１００２４

研究課題名（和文）葉層付き空間上の各葉確率解析の基礎理論の構築

研究課題名（英文）Toward a foundation of leafwise stochastic calculus on foliated spaces

研究代表者
盛田　健彦（Morita, Takehiko）

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：００１９２７８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：　葉層付き空間は「葉」と呼ばれる多様体の族を束ねて一つの幾何的対象とみなしたものである。本研究では、各葉におけるBrown運動を断熱した状態で束ねて一つの拡散過程とみなしたものを各葉Brown運動と呼び、それに基づいた葉層付き空間上の確率解析の基礎理論の構築を試みた。
応用例として扱った葉層付き空間上のGauss-Bonnet-Chernの定理の類似の定式化と証明については技術的と思われる課題が残ったものの、基礎理論構築における多くの工程を検証することはできた。また、副産物として写像トーラス上の各様Brown運動に関する中心極限定理などを得た。

研究成果の概要（英文）：A foliated space is a family of manifolds each of which is called a leaf satisfying some geometric conditions. A leafwise Brownian motion on a foliated space is a diffusion process obtained by combining Brownian motions on leaves provided that each leaf is insulated from the others. We tried to establish a foundation of stochastic analysis on foliated space via the leafwise Brownian motion. There are many processes in order to finish it. We verified that most processes are finished. But a few of them are still in construction because of technical difficulties. As by-products we obtain a several results including a central limit theorem for leafwise Brownian motions on mapping tori.

研究分野：確率論

キーワード：確率解析　ブラウン運動　葉層付き空間　各葉拡散過程　中心極限定理

## １．研究開始当初の背景

　本研究の着想に至った先行結果を含め、研究開始当初の背景は以下の通りである。

(1) 葉層多様体上の各葉 Brown 運動の研究は 30 年ほど前の L. Garnett (Journal of Functional Analysis 51 (1983) 285--311) に端を発している。コンパクトな葉層多様体で滑らかな Riemann 計量を備えているものを考えると、各葉には多様体上に与えられた Riemann 計量から誘導された自然な計量が入り、それに対応する Laplace-Beltorami 作用素を生成作用素とする Brown 運動が定まる。Garnett は、葉毎に得られた Brown 運動を互いに断熱された状況にあると想定して束ねることで得られた拡散過程を全空間上の各葉 Brown 運動と呼んだ(断熱された Brown 運動ともいう)。 彼女は、各葉 Brown 運動の半群が Feller 性をもつことを証明し、それを用いて調和測度(=各葉拡散過程の不変測度)の存在を含むいくつかの重要な結果を得ていた。

(2) Garnet が以上のような結果を得た当時、葉層多様体が横断測度と呼ばれるホロノミー不変測度をもつ場合には体積要素の代替物として横断測度を用いて Connes の指数定理 (Atiyah-Singer 指数定理の葉層多様体版)を示すことができることは知られていたが、横断測度をもたない葉層多様体の場合への拡張については行き詰まっていた。ここで、横断測度が各葉 Brown 運動の調和測度になっていることに注意すると、Garnett による調和測度の存在定理を認めれば Connes の指数定理を調和測度の導入によって一般化できると期待するのは自然なことである。

(3) しかしながら、Garnett の Feller 性の証明には難点があった。この難点は 2003 年に A. Candel が Advances in Mathematics 176 (2003) 187--247 に発表した論文において葉層付き空間上の 2 階各葉楕円型偏微分作用素に Hille-Yosida 理論を適用して Feller 半群を構成するまでは未解決のままであった。すなわち、上の(2)で述べたようなことが実行可能かどうかということも Candel の仕事までは疑わしかったのである。

(4) Candel 流の方法では、得られた Feller 半群から各葉拡散過程を構成するということになる。Candel の方法は葉層多様体のみならず葉層付き空間の場合に適用可能であり、十分一般的な接近法ではあるが、道の空間上での解析を行うには抽象的過ぎるという欠点があった。そこで注目したのが、本研究の研究代表者の指導のもとで 須崎 清隆 が行った研究である。須崎は、各葉確率微分方程式の概念を導入し各葉拡散過程をその解として求める方法を開発した(本研究課題採択当初は未発表の状況であったが、その後 Tohoku Mathematical Journal 67 (3015) 247--272 に掲載)。これを用いると葉に沿って十分滑らかな係数をもつ 2 階楕円型偏微分作用素を生成作用素とする各葉拡散過程が対応する各葉確率微分方程式の強い意味の解として構成できる。したがって、Wiener 汎関数としての解析が可能となる。さらに、得られた解には確率流を定めることまでは期待できないが、初期値に関する確率連続性は保証することができ、したがって Feller 性も従う。

## ２．研究の目的

　以上の背景を考慮した上で、本研究は当初次の３つの目標を掲げていた。

(1) 須崎によって Wiener 汎関数として構成された各葉拡散過程に対して適用可能な確率解析、とくに Malliavin 解析の枠組みを構築する。

(2) 各葉拡散過程の調和測度を用いた Connes の指数定理の確率論的証明を念頭に、各葉 Brown 運動に基づいた葉層付き空間上の確率解析の基礎の構築を試みる。

(3) (1)、(2)で得られた結果を実際に葉層付き空間に関する Gauss-Bonnet-Chern の定理に応用することを試みる。

## ３．研究の方法

　まず、葉毎に Riemann 計量が与えられており、それらが全空間において連続に繋ぎ合わされているような葉層付き空間にしぼる(滑らかであることまでは要求しない)。直面する障害の主たるものは全空間で定義された滑らかな確率流の存在を仮定することができないことである(この問題については完全な解決には至っていない)。これを回避するために、葉の方向の正則性と全空間における確率連続性のみを利用する手法が必要となる。そこで、滑らかさの欠如に対しても有効な Dirichlet 形式による各葉拡散過程の再構成を行なう。この作業の後、各葉拡散過程と超関数の合成、Winer 汎関数の漸近展開の順で葉層付き空間の Gauss-Bonnet-Chern の定理に向けた研究を進めることとし、当初は以下のような計画であった。

(1) 研究対象とする葉層付き空間は、葉毎に Riemann 計量が与えられており、それらの計量が全空間において適切な意味で連続的に変化するようなものにしぼる。より具体的には：

・ 各葉は計量に関して完備である；

・ 各葉における単射半径が葉に無関係な正の数で下から評価されている；
・ 与えられた計量から定まる各葉の上の Riemann 曲率テンソルのすべての階の偏微分が一様に有界；

といった、いわゆる葉に関する一様有界幾何条件を満たすものを研究対象とする。

多様体上の滑らかな係数をもつ確率微分方程式の解の場合には、空間変数に関して滑らかな確率流が定まり、様々な議論を容易にしていた。しかし、我々が研究対象とする葉層付き空間においては、各葉に沿った方向についての滑らかさは保証できるが空間全体においての滑らかさは期待できない。この点については須崎 清剛の結果によって、空間変数に関する確率連続性が保証できるところまでは分かっている。したがって、考えている Wiener 汎関数を Wiener 測度で積分して得られた関数が葉の方向には滑らかで、空間全体では連続という程度の前提で既存の理論を書き直す作業が必要である。以上の経緯から必要に応じて須崎 氏にも研究協力者として本研究に加わってもらうことにした。

(2) 拡散過程の構成法として Dirichlet 形式による方法についても視野に入れておく必要がある。拡散過程の構成については Feller 半群を構成する方法. 確率微分方程式を解く方法, Dirichlet 形式に持ち込む方法が主要な方法としてよく知られている。Dirichlet 形式の方法は空間の幾何構造が微分可能多様体からほど遠い場合も有効な方法として重要なものであるにもかかわらず、葉層付き空間の各葉拡散過程に応用した先行研究が見受けられない。この機会に、Dirichlet 形式の方法による各葉拡散過程の構成とエネルギー測度を用いた解析についても研究を始める。

① 初年度は各葉拡散過程に関する Malliavin 解析の類似を扱う前に準備しておくべき基本的結果の蓄積に当てる。葉層付き空間上の関数が全空間で連続かつ葉に沿って滑らかになるための十分条件についても確認しておく。

② 2年目からは Malliavin 解析の類似(以下、各葉 Malliavin 解析という)に関する研究に入る。まず、通常の Malliavin 解析における Wiener 汎関数の滑らかさに関する現在までの結果についての資料収集を行っておく。葉に横断的な方向に連続的に変化する Wiener 汎関数の非退化性の条件として適切なもの、Malliavin の非退化条件の類似について検討し、いわゆる、部分積分公式を準備する。次に、確率論によらず解析的に証明できることではあるが、葉毎に非退化な各葉確率微分方程式の場合について、推移確率が滑らかな密度関数をもつことの確率論的証明に挑む。同時に、Gauss 型評価についても確認しておく。

③ 3年目(最終年度)は、コンパクト葉層付き空間として Gauss-Bonnet-Chern の定理の類似を重点的に扱う予定であった。コンパクト性から一様な有界幾何条件が満たされている。通常のコンパクト多様体で行なうように葉毎に de Rham-Kodaira ラプラシアンに関する熱方程式の基本解は Wiener 超汎関数の期待値として表現できるはずであるが幾つもの難点を有していた。Springer 社から出版されている S. Watanabe Tata Institute のレクチャーノートを参考にしながら、これらの問題の解決法を見いだすことを試みる。

## ４．研究成果

(1) 平成 26 年度：初年度は葉層付き空間上の確率微分方程式の解に対して、多様体上の確率微分方程式の解に対して発展して来た解析的手法がどれくらい適用可能なのかという問題に対して、例を用いて確認する作業に多くの時間を割いた。最も簡単な例として、底空間をコンパクト距離空間年, その上の位相力学系から定まる写像トーラスを扱った。これについても須崎氏による力学系と各葉 Brown 運動の調和測度を具体的方法で対応づける基本的な先行結果がある。その枠組みを利用した定式化によって調和測度に関してほとんどすべての出発点に関する中心極限定理が不変原理の形で成立することを示した。

さらに、極限過程が非退化な Brown 運動となるための幾つかの十分条件を得た。その他、一般化された Kronecker 葉層空間を導入して、Ledrappier が 20 年程前に研究した負曲率閉曲面上の測地流の定める葉層多様体上の各葉 Brown 運動に関する中心極限定理との比較を行った。これらの結果とそれ以前から続けていた須崎氏との共同研究とを整理し、共著論文にまとめたものが Tokyo Journal of Mathematics 38 巻 (2005)に掲載された。

(2) 平成 27 年度：２年目は当初の計画通り主に葉層付き空間上の確率微分方程式の強い意味での解として得られた各葉拡散過程に対して Malliavin 解析の類似を考えるための準備を行った。具体的には、まず、通常の滑らかな多様体上の確率微分方程式の解が定める Wiener 汎関数の正則性や、密度関数についての様々な評価式に関して、これまで知られている研究結果の資料を収集し、葉層付き空間上の確率微分方程式の解として定まる各葉拡散過程に対してこれらの結果の類似をどのように定式化することが適切であるかを検討した。各葉が有限幾何条件を満たすコンパクト葉層付き空間では、葉毎に通常の多様体上の議論と同様な拡散過程が確率流のレベルで得られるが、横断方向の正則性については連続以上には期待できない状況となるため、空間全体で確率流のレベルま

で期待した枠組みを期待することはできない。結局、当初想定した葉毎に通常の議論を適用し、断熱された拡散過程の族として扱う方法が現状では最も有効であろうという結論に達した。S. Watanabe による Wiener 汎関数の漸近展開理論を手本としてパラメータ付きの各葉 Wiener 汎関数の漸近展開理論についても概要をつかむことはできたが、この段階で論文としてまとめるべきかどうかは検討中である。

一方、Malliavin 解析の類似を考える上で確率流の解析も重要であることが知られている。この立場から、本研究以前から行っていた写像のランダム合成の極限についても再考し、結果の一部について数理解析研究所講究録 1942 巻に掲載の論文において発表した。

その他、本研究の技術面での副産物として得られた手法を転送作用素に応用することによって，力学系の極限定理についても若干の結果を得て、2016 年１月に慶應義塾大学で開催された Seminar in Ergodic Theory - Keio 2016 の招待講演で報告した。

(3) 平成 28 年度：最終年度の 3 年目は各葉が有限幾何条件を満たすような葉層付き空間の場合に、コンパクト Riemann 多様体の Gauss-Bonnet-Chern の定理の確率解析的証明の類似を示すために、体積測度の代替物として調和測度を用いるという方針が前年度までの研究で定まっていた。Riemann 多様体の場合の確率解析的証明の各工程に対応する部分を検証する際に、予め難所と想定される箇所について吟味する作業を進めたところ、多くの工程については想定通りの数理現象が生じており大きな問題なく検証作業を進めることができた。一方、確率流の取り扱いについては、各葉で既存の議論が機能することは確認済みであるが、これに加え確率流の全空間での振る舞いを制御するために何らかの条件を課さねばならないという懸念がさらに深まったことにより、これと関係する工程で再考の必要性があることがわかった。したがって、幾つかの工程については少し時間をかけて慎重に議論を展開するべきであり、本課題研究期間終了後も継続的に研究を進める予定である。

本研究の副産物としては、調和測度のエルゴード成分が複数個現れたときの極限定理の形がどのようなものになるかということと関連して、適当な Banach 代数上で擬コンパクトとなるような Perron-Frobenius 作用素をもつ非特異変換の混合型中心極限定理について指導学生と共同研究を行った結果をまとめた論文を Kyushu Journal of Mathematics 71 巻(2017) に発表した。その中で現れる変換の例と Banach 代数を現時点において可能な限り一般的な枠組みで与えた結果については 2016 年 5 月に大阪大学で開催された研究集会「Dynamics, Ergodic Theory and Fractals」における招待講演の中で報告した。

## ５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① Takuya IKEDA and Takehiko MORITA、Central limit theorem of mixed type for transformations with quasi-compact Perron-Frobenius operators、査読有り、Kyushu Journal of Mathematics、Vol.71 No.1 (2017) pp.31--64
DOI:10.2206kyushujm.71.31

② Takehiko MORITA、Asymptotic behavior of one-dimensional random dynamical systems - revisit、査読なし、数理解析研究所講究録　第 1942 巻 (2015) pp.31--43
http://hdl.handle.net/2433/223825

③ Takehiko MORITA and Kiyotaka SUZAKI、Central limit theorem for leafwise Brownian motions on mapping tori、査読有り、Tokyo Journal of Mathematics、Vol.38 No.1 (2015) pp.15--44
https://projecteuclid.org/euclid.tjm/1428412563

〔学会発表〕（計 3 件）

① Takehiko MORITA、Makeshift algebras associated with dynamical partitions for expanding fibred systems、Dynamics, Ergodic Theory and Fractals、2016 年 5 月 22 日、大阪大学大学院理学研究科（大阪府・豊中市）

② Takehiko MORITA、Limit theorems for piecewise expanding systems via quasi-compact Perron-Frobenius operators、Seminar in Ergodic Theory - Keio 2016、2016 年 1 月 22 日、慶應義塾大学来往舎（神奈川県・横浜市）

③ Takehiko MORITA、Poisson limit law for dynamical systems with quasi-compact transfer operators、ランダム力学系とその応用、2015 年 9 月 28 日、京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）

## ６．研究組織
(1)研究代表者
盛田　健彦（MORITA, Takehiko）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：００１９２７８２

(2)研究分担者 なし
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
杉田　洋（SUGITA，Hiroshi）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：５０１９２１２５

日野　正訓（HIBI，Masanori）
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：４０３０３８８８

(4)研究協力者
須崎　清剛（SUZAKI，Kiyotaka）
徳永　裕介（TOKUNAGA，Yusuke）
池田　拓哉（IKEDA，Takuya）
鈴木　新太郎（SUZUKI，Shintaro）