

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 28 日現在

機関番号：17102
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2016
課題番号：26610025
研究課題名(和文) ランダムグラフとパーシステントホモロジー

研究課題名(英文) Random graph and persistent homology

研究代表者

白井 朋之 (Shirai, Tomoyuki)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：70302932

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：位相的なデータ解析のツールとして知られるパーシステントホモロジーの理論をランダムグラフの理論へ応用した。さらにその視点を押し進めて、ランダムグラフの高次元への拡張であるランダム複体の理論への応用にも用いた。このことにより、これまでのランダム複体の研究をランダム複体の族の研究へと発展させて、より詳しい解析とまた新たな視点を得ることに成功した。

研究成果の概要(英文)：Persistent homology is known as a tool of topological data analysis and we apply it to the theory of random graphs. We emphasize the viewpoint of persistent homology to apply it to random complexes. This study opens a way to analyze a family of random complexes as well as random complexes themselves, and also this enables us to develop the theory of random complexes and provides new viewpoints on this area.

研究分野：確率論

キーワード：パーシステントホモロジー ランダムグラフ ランダム複体

1. 研究開始当初の背景

ランダムグラフとはグラフの集合上に適当な確率測度を与えて、ランダムにサンプルすることにより得られるグラフである。典型的な例は、Erdos-Renyi ランダムグラフ $G(n, p)$ で、 n 点上の完全グラフ K_n の $n(n-1)/2$ 本ある辺を確率 p で独立にグラフの辺集合に入れるかどうかを決めて得られる K_n の(ランダムな)部分グラフである。Erdos-Renyi の有名な結果は、 p の増大に伴いランダムグラフ $G(n, p)$ の連結性が劇的に変化するいわゆる相転移現象の発見であった。その研究以後、様々なランダムグラフに対して、グラフの特性量の確率論的性質の研究が盛んに行なわれている。一方、パーシステントホモロジー群とは、単体複体の増大列(フィルトレーション)に沿ったホモロジー群の系列とそれらホモロジー群の準同型との組で、単体複体の時間発展を自然に記述する枠組みで、ホモロジー群の時間発展とも言えるものである。最近では、データ解析の分野でも注目されている。背後に幾何学的な図形をもつ点データのサンプルの情報を元にその図形のトポロジーを復元する方法論で、センサーネットワークや蛋白質の解析など応用を視野に入れた研究が2000年以降活発に行なわれている。研究開始当初までには、これらの両者の間の関係は特に指摘されていなかった。

2. 研究の目的

本研究は Erdos-Renyi ランダムグラフやランダムな点配置から定まる幾何学的グラフに代表されるランダムグラフのパーシステントホモロジーを、パーシステント図に値をとる確率変数として捉えて、その確率論的性質を調べるとともに、グラフのサイズを無限大にする極限における種々の極限定理を導出することを目的とする。新しい着眼点は、単体複体のフィルトレーションをグラフダイナミクスの高次元版と捉えることにある。ランダムグラフの理論においてグラフダイナミクスが

果たした役割を高次元でも通用する形の手法へ昇華すること、また確率論・トポロジー・グラフ理論などの融合的研究を通して、新たな研究の方向性と具体的問題の提供に寄与することを目標とする。

3. 研究の方法

本研究の方法の基本的なアイデアは、グラフダイナミクスとフィルトレーション付き複体の類似性に着目して、ランダムグラフのパーシステントホモロジー群について研究する点にある。これは単なる見かけ上の類似ではなく本質的なものである。実際、グラフダイナミクスにおいて、時間経過にともないグラフに辺が加えられ連結度が増していく様子は、パーシステントホモロジー群の言葉では、異なる 0 次元ホモロジー群の生成元(連結成分)が辺で結ばれて、生成元が一つずつ消滅することを意味する。研究開始当初の背景で述べた時間の経過とともに観察されるランダムグラフの連結性に関する相転移は、0 次元ホモロジー群に関する相転移とも考えられる。この視点に着目して、Friezeの最小全域木に関する極限定理のパーシステントホモロジー論からの再解釈を行い、高次のホモロジー群に対する拡張を行う。また、同様の方法でランダムグラフで得られている種々の連結性(0次元ホモロジー)に関連する問題を k 次元ホモロジー ($k \geq 1$) に拡張して高次元のランダム複体のパーシステントホモロジー論的視点からの研究を行う。

4. 研究成果

ランダムグラフを包含関係の意味で増加するグラフの確率過程と考え、さらにそれをランダムなフィルトレーションとみなすことによりランダムなパーシステントホモロジーを導入し、その視点からランダムグラフの研究を行った。この視点は自然にランダムグラフをランダム複体に拡張する方向性を示唆し、実際にランダムグラフで得られている

種々の結果をランダム複体へ拡張する試みとその枠組みの整備を行った。例えば、ランダムグラフ上の最小全域木の問題のランダム複体への定式化とその解析(論文),ランダム複体上でのランダムクラスターモデルの導入と Tutte 多項式との関連の指摘(論文)などはその例である。前者は上述の観点からの既存研究はなく、パーシステントホモロジーの視点を導入して本質的に新しい結果を得たのは本研究が初めてである。これらの研究は国内ではもちろん海外での同様の研究にも影響を与えており、ランダムグラフのパーシステントホモロジーの視点を導入した萌芽研究としては成功したと言える。今後は本研究で得られた成果をさらに発展させていくとともに、次第に明らかになってきたグラフの場合とは異なる複体(高次元)特有の新たな現象や問題点をさらに追求していくことにより、例えば確率論のパーコレーションの問題の自然な高次元の研究の道筋を提供し、さらには応用トポロジーや組合せ論研究への新たな視点を提供することが期待できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Yasuaki Hiraoka and Tomoyuki Shirai. Minimum spanning acycle and lifetime of persistent homology in the Linial-Meashulam process, *Random Structures and Algorithms* 59 (2017), 1-26

Yasuaki Hiraoka and Tomoyuki Shirai. Tutte polynomials and random-cluster models in Bernoulli cell complexes, *RIMS*

Kôkyûroku Bessatsu B59 (2016), 289-304.

[学会発表](計 9 件)

Tomoyuki Shirai. Persistent homology and its applications, "2017 I2CNER Annual Symposium: Applied Math Challenges in Energy & the Next-Generation Electric Grid", I2CNER, Kyushu University. 2017.2.1.

Tomoyuki Shirai. Persistent homology of random complexes built over point processes, "Workshop on Geometry and Probability", RIMS, Kyoto University. 2016.10.24-28.

Tomoyuki Shirai. Persistent homology and minimum spanning acycle for certain random complexes, "Workshop on High-Dimensional Expanders 2016", Hôtel Les Sources, Les Diablerets, Switzerland. 2016.6.19-24.

Tomoyuki Shirai. On the topology of random simplicial complexes, "The 14th workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems", RIMS, Kyoto University. 2015.10.26-29.

Tomoyuki Shirai. Lifetime of persistent homology and minimum spanning acycle in random

topology, “ Conference:
Stochastic Analysis ”, RIMS,
Kyoto University. 2015.9.7-11.

Tomoyuki Shirai. Persistent
homology and minimum spanning
acycle for random simplicial
complexes, “ Group
Representations in Dynamical
Systems and Geometry ”, CIRM,
Marseille, France. 2015.6.29-7.3.

Tomoyuki Shirai. Lifetime Sum of
Persistent Homology and Minimum
Spanning Acycles in Random
Simplicial Complexes,
“ Topological Data Analysis on
Materials Science ”, AIMR,
Tohoku University.
2015.2.19-21.

Tomoyuki Shirai. Persistent
homology of certain random
simplicial complexes, “ The 13th
workshop on Stochastic Analysis
on Large Scale Interacting
Systems ”, University of Tokyo.
2014.11.5-7.

Tomoyuki Shirai. Persistent
homology for certain random
simplicial complexes,
“ International Conference on
Stochastic Processes, Analysis
and Mathematical Physics ”,
Kansai University, Osaka.
2014.8.25-29.

〔その他〕
ホームページ等
<http://imi.kyushu-u.ac.jp/~shirai/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

白井 朋之 (SHIRAI, Tomoyuki) 九州大学・
マス・フォア・インダストリ研究所・教授
研究者番号：70302932

(2)研究分担者

平岡 裕章 (HIRAOKA, Yasuaki)
東北大学・AIMR・教授
研究者番号：10432709

樋口 雄介 (HIGUCHI, Yusuke)
昭和大学・教養部・講師
研究者番号：20286842