様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2017
課題番号：２６６１００２９

研究課題名（和文）非線形発展方程式系におけるrogue wave解の一般的構成とその代数構造の研究

研究課題名（英文）Rogue wave solution for nonlinear evolution equations and its algebraic structure

研究代表者
太田　泰広（Ohta, Yasuhiro）

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：１０２１３７４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,900,000円

研究成果の概要（和文）：Rogue waveとは、ある種の非線形発展方程式において現れる、時間的にも空間的にも局在した解のことであり、数学的に豊富な構造をもつだけでなく、様々な物理系において観測される応用上重要な現象でもある。本研究では、様々な非線形発展方程式系に対して可積分系の理論を応用して、rogue wave解の階層を一般的に構成する方法を与えるとともに、それらの解の行列式表現を導出することによって解空間の代数的構造を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Rogue wave is a class of solutions for some nonlinear evolution equations which are localized both in time and space. These solutions have rich mathematical structures and describe some interesting phenomena in various physical systems. The theory of integrable systems is applied to investigate the rogue wave solutions for some nonlinear evolution equations. A method to construct general rogue wave solutions is proposed and based on the determinant representation of rogue wave solutions, the algebraic structure of the space of solutions is studied.

研究分野：応用数学

キーワード：関数方程式論　応用数学

1. 研究開始当初の背景

(1) Rogue wave はエネルギーが時間的空間的に局在した波であり、最初に海洋の波において発見され、近年では水槽における水面波の実験や光導波路におけるレーザー光の実験によっても観測されている。通常の波動とは異なり rogue wave は、ある時刻において特定の位置に突然出現した後、短時間のうちに消滅するという特徴をもつ。この顕著な特徴のために、幾つかの国際会議でも rogue wave 専門のセッションが企画されるなど、関連する研究分野において近年非常に注目を集めている。

(2) 我々は非線形シュレーディンガー方程式などに対して、rogue wave 解を無限個のパラメータを含む形に拡張することに成功し、その代数的構造を明らかにしてきた。これまでの個別の方程式に対する結果を数学的に捉え直すことによって、同様の構造をもつ方程式系に対する rogue wave 解を一般的に構成し、rogue wave 解に対する数学的定式化を与えることには重要な意義がある。

2. 研究の目的

(1) Rogue wave とは、ある種の非線形発展方程式において現れる、時間的にも空間的にも局在した解のことであり、数学的に豊富な構造をもつだけでなく、様々な物理系において観測される応用上重要な現象でもある。本研究では、rogue wave 解に関して以下のような研究を行うことを目的とする。

(2) 解空間に作用する変換群を明らかにすることによって、同様の代数的構造をもつ様々な発展方程式系に対して、rogue wave 解の階層を一般的に構成する方法を与える。解のもつ対称性に基づいて、rogue wave 解をもつような発展方程式系のクラスを拡張、分類する。応用上重要な方程式系に対して、一般的な rogue wave 解の性質を具体的かつ詳細に解析する。

3. 研究の方法

(1) 既知の rogue wave 解に対して成り立つ双線形方程式を具体的に解くことによって、一般的な rogue wave 解を構成し、変換群の代数的構造を明らかにする。Rogue wave 解の系列やその変換群に関しては未知な部分が多いので、まずは具体的な計算による解の構成と変換群の構成を並行して行いつつ、相互のフィードバックを通して、一般的な rogue wave 解の空間を決定していく。

(2) 変換群の成す代数を拡張することによって、様々な対称性をもつ rogue wave 解の空間と、それを特解とする方程式の系列を一般的に構成、分類する。数学的に自然な変換群が作用する関数空間を構成した後に、その代数構造をより一般の対称性に拡張することによって、広いクラスの方程式階層とその rogue wave 解の空間を明らかにする。

(3) 応用上重要な方程式について具体的な解の挙動を調べ、rogue wave 解のパラメータの意味を明らかにし、安定性や最大振幅などの性質を解析する。新しく導出された方程式階層の中から、元々の rogue wave の応用において有用な方程式を抽出し、その具体的な解の性質を研究することによって、新しい現象の発見や制御などの応用を目指す。

4. 研究成果

(1) 集束型および非集束型の Ablowitz-Ladik 方程式に対して、双線形化法を用いることにより一般的な rogue wave 解を構成した。集束型の場合には、rogue wave は常に有界であることが示された。さらに、最も基本的な最低次の rogue wave は、背景となる搬送波の振幅の少なくとも三倍の最大振幅をもち、高次の rogue wave は複数の局在波が三角形や円形の配列パターンに並んでいることがわかった。空間が離散化された Ablowitz-Ladik 方程式においては、連続の場合と異なり、非集束型の方程式に対しても rogue wave 解が存在することが明らかになった。しかも、非集束型の場合には、正則な初期条件に対して有限時間で振幅無限大になる爆発解が存在することが示された。これらの解は行列式を用いて表現され、N 次の rogue wave 解には 2N+1 個の独立な実パラメーターが含まれている。これらの解は、搬送波中に含まれる波数の任意パラメーターを用いることによって、空間離散変

形 KdV 方程式を含む離散 Hirota 方程式に対する rogue wave 解も与えている。すなわち、離散 Hirota 方程式の係数のパラメーターを、搬送波と時間のスケーリング定数に繰り込むことで、Ablowitz-Ladik 方程式に帰着させることができる。解の Gram 型行列式表示において、その成分として多項式をとり分散関係を課すことによって簡約条件が満たされているので、同様の構造をもつ行列式解を考えることにより、様々な方程式系に対する rogue wave 解を構成することが可能になる。

(2) 結合型短パルス方程式に対して、可積分性を保存するような半離散化および全離散化を構成した。離散類似の構成において重要となるのは、結合型短パルス方程式の解の行列式構造とその行列式解がみたす双線形方程式である。結合型短パルス方程式の半離散および全離散類似に対する N ソリトン解が、カソラチ行列式を用いて明示的に与えられた。連続極限において全離散結合型短パルス方程式は半離散結合型短パルス方程式に収束し、さらに半離散結合型短パルス方程式は連続の結合型短パルス方程式に収束することが示された。ここで構成された可積分な半離散結合型短パルス方程式を数値シミュレーションにおける自己適合移動格子法に応用し、安定で高精度の数値計算スキームを与えることに成功した。数値計算の結果は解析的な結果とよく一致し、スキームの数値的安定性が示された。結合型短パルス方程式は、ホドグラフ変換をともなう独立変数および従属変数の変換によって、ベックランド変換を介して結合した戸田格子方程式の系列に変換することができる。その戸田格子方程式の系列に対するロンスキアン解を離散化し、カソラチ行列式を考えることによって、ソリトン理論における直接法を応用して離散戸田格子方程式の系列をえることができる。そこで離散ホドグラフ変換を導入することによって、結合型短パルス方程式の離散類似を構成することができる。格子点がカソラチ行列式解によって与えられるため、解と連動して運動する自己適合移動格子がえられる。本方法によって鋭いピークをもつパルス解を再現することができ、さらにパルスの相互作用を数値計算によって精度よく捉えることができることが示された。

(3) 水面波と内部波が共存する流体系における短波長波相互作用を記述する一次元 Yajima-Oikawa 方程式系に対して、短波成分が複数存在する結合型多成分方程式系を考え、その可積分な空間離散化をソリトン理論における双線形化法に基づいて構成した。離散 BKP 系列の Baecklund 変換に対する簡約を用いて、明るいソリトン解と暗いソリトン解のそれぞれについて、一般的なパフィアン解を構成した。タウ関数に対する双線形方程式系のうち、時間発展を記述する方程式は BKP 階層の理論から導出されるものであるのに対して、成分間の結合を与える双線形方程式は戸田格子方程式の解のパフィアン表示に基づくものであり、短波成分の多成分拡張が容易に可能となっていることが示された。同様の拡張が Degasperis-Procesi 方程式の短波極限においても可能であることを見いだした。集束型非線形 Schroedinger 方程式の最低次の rogue wave 解がパラメータの自由度をもたないのに対して、一次元 Yajima-Oikawa 方程式においてはパラメータつきの rogue wave 解が存在することが、方程式のゲージ不変性に関連していることが明らかになった。ゲージ変換と Galilean 変換によって方程式が不変である非線形 Schroedinger 方程式の場合には、変換の自由度によって解の自由度が吸収されることによって解のパラメータ依存性が失われる。ゲージ不変性をもたない一次元 Yajima-Oikawa 方程式に対して、パラメータを含む一般的な rogue wave 解を高次の解も含めて構成することに成功した。

(4) 可積分な半離散ベクトル型非線形シュレーディンガー方程式に対して、ソリトン理論における広田の双線形化法を用いて、明るいソリトンと暗いソリトンが共存するような一般的なソリトン解を構成し、それらの解がパフィアンによって表現されることを明らかにした。二成分半離散非線形シュレーディンガー方程式に対する 1-明-暗ソリトン解および 2-明-暗ソリトン解を明示的に与え、三成分半離散非線形シュレーディンガー方程式に対しては 2-明-1-暗ソリトン解と 1-明-2-暗ソリトン解の具体形を表示し、それらの挙動を解析した。また 2-ソリトン解について各ソリトンの漸近挙動を解析した。アブロヴィッツ-ラディック方程式を時間離散化した全離散非線形シュレーディンガー方程式に対して、

時間的に局在する構造を持つ rogue wave 解を、ソリトンの直接法を応用することによって構成した。グラム型行列式による一般的なブリーザー解の表示において、波数に関する極限をとり代数解に退化させることによって、双線形方程式に対する多項式解として rogue wave 解が与えられる。方程式が集束型の場合には、rogue wave 解は正則な解であり、時間的空間的に局在した構造をもつ。一方、方程式が非集束型の場合には最低次の rogue wave 解は、独立変数を連続変数とみなしたときには特異性をもつ関数となり、時間的空間的に局在した爆発を記述する。全離散の方程式のため、従属変数が有限の値を保ったまま特異性を越えて時間発展することが可能であり、発散した領域の内部を経過する解を与えることができる。これらの rogue wave 解の代数的構造や解析的挙動を詳細に研究した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 8 件)

(1) B.-F. Feng and Y. Ohta, N-bright-dark soliton solution to a semi-discrete vector nonlinear Schrödinger equation, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 査読有 **13** (2017) 071. DOI: 10.3842/SIGMA.2017.071

(2) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, The Degasperis-Procesi equation, its short wave model and the CKP hierarchy, Annal. Math. Sci. Appl. 査読有 **2** (2017) 285–316. DOI: 10.4310/AMSA.2017.v2.n2.a4

(3) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, An integrable semi-discrete Degasperis-Procesi equation, Nonlinearity 査読有 **30** (2017) 2246–2267. DOI: 10.1088/1361-6544/aa67fc

(4) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, Geometric formulation and multi-dark soliton solution to the defocusing complex short pulse equation, Stud. Appl. Math. 査読有 **138** (2017) 343–367. DOI: 10.1111/sapm.12159

(5) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, A two-component generalization of the reduced Ostrovsky equation and its integrable semi-discrete analogue, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有 **50** (2017) 055201.

(6) J. Chen, Y. Chen, B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, An integrable semi-discretization of the coupled Yajima-Oikawa system, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有 **49** (2016) 165201.

(7) B.-F. Feng, J. Chen, Y. Chen, K. Maruno and Y. Ohta, Integrable discretizations and self-adaptive moving mesh method for a coupled short pulse equation, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有 **48** (2015) 385202.

(8) Y. Ohta and J. Yang, General rogue waves in the focusing and defocusing Ablowitz-Ladik equations, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有 **47** (2014) 255201.

[学会発表] (計 5 件)

(1) B.-F. Feng and Y. Ohta, Semi-discrete analogues of the complex short pulse and coupled complex short pulse equations based on the KP hierarchy reduction, AMS Sectional Meeting (Fall Central Sectional Meeting), 10 Sep 2017, Denton (USA).

(2) Y. Ohta, Rogue wave solutions for discrete soliton equations, The Fourth International Conference, Nonlinear Waves - Theory and Applications, 25 Jun 2016, Beijing (China).

(3) Y. Ohta, Algebraic Solutions of Soliton Equations and Their Applications, The 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, 12 Aug 2015, Beijing (China).

(4) Y. Ohta, Rogue Waves for Some Soliton Equations, SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures, 13 Aug 2014, Cambridge (UK).

(5) Y. Ohta, Rogue wave solution of Ablowitz-Ladik equation, Symmetries and Integrability in Difference Equations (SIDE 2014), 19 Jun 2014, Bangalore (India).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

太田 泰広 (OHTA Yasuhiro)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 10213745

(2) 研究分担者

野海 正俊 (NOUMI Masatoshi)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80164672

山田 泰彦 (YAMADA Yasuhiko)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00202383