

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 5 月 21 日現在

機関番号：24402

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2016

課題番号：26610030

研究課題名(和文) 実解析的関数空間で機能する未開拓変分原理の探索

研究課題名(英文) Explore of undiscovered variational principles in function spaces in real analysis

研究代表者

高橋 太 (Takahashi, Futoshi)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10374901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題の目的は、実解析学に現れる様々な関数空間において新規に発見されつつある関数不等式に対し、その成立の背後にある未知の変分構造を捉え、新しく変分原理として整備・確立し、変分原理の視点から当該の関数不等式を統一的に理解し、偏微分方程式論への応用を探ることである。本研究課題の具体的な研究内容は以下の通りである。(1)不定符号変分構造を持つ楕円型方程式系への Sobolev-Orlicz 空間を用いたアプローチ、(2)種々の関数空間における Trudinger-Moser 型不等式に付随する変分構造の解明、(3)スケール不変 Hardy 型不等式とその応用、特に解の安定性理論との関係の解明

研究成果の概要(英文)：The aim of this research is to understand the variational structures of several functional inequalities, such as Trudinger-Moser, Sobolev, and Hardy type, which are established newly in various functional spaces such as Lorentz, and Orlicz, and to find new applications to PDE theories. More precise research subjects are the following: (1) Sobolev-Orlicz approach to elliptic systems with the indefinite variational structures, (2) Study of the Trudinger-Moser type inequalities and their variational structures (3) Hardy type inequalities of the scale invariant form and its application to the stability theory of solutions.

研究分野：変分法・偏微分方程式論

キーワード：関数不等式 変分原理 Hardy 不等式 Trudinger-Moser 不等式

1. 研究開始当初の背景

ソボレフ不等式やハーディー不等式に代表される関数不等式は、個々の関数の局所的特異性や空間無限遠方での可積分性を定量的に表すものであるが、また一方では、考える関数空間、たとえばソボレフ空間とルベグ空間の包含関係を明示するものであり、不等式を等号で満たす関数の存在・非存在は、この関数空間の間の埋蔵作用素のコンパクト性と関係して、付随するエネルギー汎関数についての変分問題として、ソボレフ空間の枠組みの中で定式化・研究が行われてきた。一方で、実解析学・調和解析学の分野では、古くから、ソボレフ空間やルベグ空間を補間するベゾフ空間、弱ルベグ空間やジグムント空間など、より詳細に関数の局所的性質を調べるのに適した関数空間が導入され、その関数解析的性質や最大作用素の有界性などの伝統的な研究がおこなわれてきた。偏微分方程式への応用の観点からは、関数不等式は方程式の解に対するアプリアリ評価を与える。しかし、従来の実解析的手法の多くは関数の対称化と再配列理論に基づいた微積分学的なものであり、個々の関数不等式の背後にある変分構造の解明にまでは達していなかった。

2. 研究の目的

本研究課題では、新しい関数不等式の探求と同時に、その成立の背後にある未知の変分構造の解明を目指す。種々の関数空間における絶対関数不等式について、それらが成立する背後にある未発見の変分構造とそのメカニズムを抽出し、新しい変分原理・臨界点理論として整備・開発することが本研究課題の主たる目的である。より具体的には以下を研究内容とする。

- (1) 不定符号変分構造を持つ楕円型方程式系への Sobolev-Orlicz 空間を用いたアプローチ
- (2) 種々の関数空間における Trudinger-Moser 型不等式 (TM 型不等式) に付随する変分構造の解明
- (3) スケール不変なハーディー型不等式とその応用、特に解の安定性理論との関係の解明

3. 研究の方法

本研究課題の研究推進に際して、年度に分けて以下の研究を行った。

- (1) 平成 26 年度は、臨界型ハーディー不等式の研究を行い、特に「シャープバージョン」と呼ばれる、原点と境界に特異点を持つハーディー型不等式について、その導出及び変分法的観点からの研究を推進した。
- (2) 平成 27 年度は、昨年度に引き続き臨界型シャープバージョン Hardy 不等式の解析を

続行し、不等式に現れる最良定数の達成可能性と領域の幾何との関連を調べた。

(3) 平成 28 年度は、TM 型不等式の研究に注力し、特に Adachi-Tanaka 型、Li-Ruf 型と呼ばれる全空間での TM 型不等式の変分法的研究を推進した。さらに近年発展が著しい分数べきラプラシアンを主要項とする TM 型不等式についても研究を開始した。

各年度とも、海外研究者の招聘、相互訪問による研究情報交換、研究代表者や研究分担者が大規模国際研究集会 (11th AIMS, 3rd Chile-Japan, EWM-EMS Summer School 等) のセッション組織や各種セミナーへの参加による研究情報収集、国内連携研究者との緊密な研究連絡等を主たる研究方法とした。

4. 研究成果

本研究課題推進中の 3 年間に得られた研究成果のうち、研究代表者に係るいくつかを以下にまとめる。

(1) 臨界型ハーディー不等式の研究

高橋は、Brezis-Vazquez の方法に示唆されて、シャープバージョン臨界型ハーディー不等式について、部分積分だけを用いる簡明な導出法を発見した。また「非シャープ型」については関連する準線形楕円型偏微分方程式の可解性を研究し、Adimurthi-Sandeep の結果の臨界型への拡張を確立した。また、最良定数の達成可能性については、「最良定数が球体の場合と同じ値となる任意の有界領域において、その最良定数は達成不可能である」ことを KAIST の J. Byeon 教授との共同研究において証明した。さらに博士学生の佐野めぐみ氏との共同研究において、「シャープ臨界型ハーディー不等式は、高次元劣臨界型ハーディー不等式の族の中に埋め込める」という内容の結果を証明した。この最後の研究は近く専門誌 *Calculus of Variations* に掲載予定である。

(2) Trudinger-Moser 型不等式の研究

Adachi-Tanaka 型、Li-Ruf 型 TM 不等式について、特に重み付きの場合への拡張を行い、重み付き Li-Ruf 型不等式の導出及び関連する最大化問題の達成可能性について Van Hoang Nguyen 氏と国際共同研究を行い、プレプリントを作成した。また分数べき TM 不等式については、空間次元が 1 次元の場合ではあるが、可積分性の指数の改良及び最良定数の達成可能性を示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 23 件)

以下はすべて査読有り論文

M. Sano, and F. Takahashi:
Scale invariance structures of the critical
and the subcritical Hardy inequalities and
their improvements,
To appear in Calc. Var. Partial Differential
Equations,
DOI 10.1007/s00526-017-1166-0

高橋太、楢円型方程式の安定解の周辺、
日本数学会雑誌「数学」第 69 巻第 1 号(2017
年 1 月冬季号) 31-55

M. Sano, and F. Takahashi:
Improved Rellich type inequalities in
 \mathbb{R}^N ,
`Proceedings of the 4th Italian-Japanese
Workshop on Geometric Properties for
Parabolic and Elliptic PDE's", GPPEPDEs,
Palinuro, Italy, May 2015.
(Gazzola, F., Ishige, K., Nitsch, C., Salani,
P. (eds.))Springer Proceedings in Math. and
Statics. Vol. 176, pp. 241--255.

M. Sano, and F. Takahashi:
Sublinear eigenvalue problems with
singular weights related to the critical
Hardy inequality,
Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2016 (2016), No.
212, pp. 1-12.
<http://ejde.math.txstate.edu/>

M. Hashizume, and F. Takahashi:
Lyapunov inequality for an elliptic problem
with the Robin boundary condition,
Nonlinear Anal., 129, (2015), 189--197.
DOI 10.1016/j.na.2015.08.006

H. Ohtsuka, and F. Takahashi:
Local asymptotic nondegeneracy for
multi-bubble solutions to the biharmonic
Liouville-Gelfand problem in dimension
four,
Differential and Integral Equations, 28,
no.7-8, (2015), 801--822

F. Takahashi:
Blow up points and the Morse indices of
solutions to the Liouville equation:
inhomogeneous case,
Advanced Studies in Pure Math. 64,
`Nonlinear Dynamics in Partial
Differential Equations" (the Proceedings of
the 4th MSJ-SI),(2015), 175--182

F. Takahashi: Extremal solutions to
Liouville-Gelfand type elliptic problems
with nonlinear Neumann boundary
conditions,
Commun. Contemporary Math., 17, (2015),
no.3. 1450016 (27 pages)

DOI 10.1142/S0219199714500163

F. Takahashi: A simple proof of Hardy's
inequality in a limiting case,
Archiv der Math., 104, (2015), no.1, 77--82
DOI 10.1007/s00013-014-0711-8

F. Takahashi: Singular extremal
solutions to a Liouville-Gelfand type
problem with exponential nonlinearity,
10th AIMS proceedings, Dynamical
Systems, Differential Equations and
Applications 2015, (2015), 1025-1033
doi:10.3934/proc.2015.1025

F. Takahashi: Nonexistence of positive
very weak solutions to an elliptic problem
with boundary reactions,
Kodai Math. J., 37, (2014), 755--768

M. Ishiwata, and H. Wadade:
On the effect of equivalent constraints on a
maximizing problem associated with the
Sobolev type embeddings in \mathbb{R}^N ,
Math. Ann., 364, (2016), 1043-1068.
DOI:10.1007/s000208-015-1243-7

N. Ioku, and M. Ishiwata:
A scale invariant form of a critical Hardy
inequality,
IMRN, (2015), no.18, 8830-8846
DOI: 10.1093/imrn/rnu212

他 10 篇

{学会発表}(計 4 件)

M. Grossi、高橋太「2次元円環領域上の平均場方程式の 2 点爆発点の位置について」、
日本数学会秋季総合分科会、広島大学、2014
年 9 月 26 日

橋詰雅斗、高橋太「Neumann 境界条件型
 L^p -Lyapunov 不等式」
日本数学会春季年会、明治大学、2015 年 3 月
21 日

佐野めぐみ、高橋太「Scale invariance
structures of the critical and the
subcritical Hardy inequalities and their
improvements」
日本数学会春季年会、筑波大学、2016 年 3 月
16 日

佐野めぐみ、高橋太「Sublinear
eigenvalue problems with singular weights
related to the critical Hardy inequality」
日本数学会春季年会、首都大学東京、2017 年
3 月 24 日

〔その他〕
ホームページ等

研究代表者高橋のプレプリントは大阪市立
大学数学研究所(OCAMI)の OCAMI Preprint
Series

<http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/math/OCAMI/preprint/>

でダウンロード可

6. 研究組織

(1)研究代表者

高橋 太 (TAKAHASHI Futoshi)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10374901

(2)研究分担者

石渡 通徳 (ISHIWATA Michinori)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授
研究者番号：30350458

和田出 秀光 (WADADE Hidemitsu)
金沢大学・機械工学系・准教授
研究者番号：00466525

(3)連携研究者

猪奥 倫左 (IOKU Norisuke)
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：50624607