

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 1 日現在

機関番号：12701

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2015

課題番号：26610035

研究課題名(和文)特異点論による結晶理論と視覚理論の幾何学的融合

研究課題名(英文)Geometric integration of crystal theory and vision theory by singularity theory

研究代表者

西村 尚史(NISHIMURA, Takashi)

横浜国立大学・環境情報研究科(研究院)・教授

研究者番号：80189307

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 平衡状態の結晶の幾何的モデルであるウルフ図形と透視射影との、特異点論による、新たな関係を得ることに成功した。この成果は、D. Kagatsume and T. Nishimura, Aperture of plane curves, Journal of Singularities, 12(2015), 80-91 として出版済みである。

(2) 本研究期間の後半では、ウルフ図形とそのウルフ図形を生成する最良な連続関数である convex integrand との密接な関係をさまざまな観点から研究し、多くの結果を得た。これらの結果は、2016年6月初旬時点ではいずれも投稿中である。

研究成果の概要(英文)：(1) We succeeded to obtain a new relation between a Wulff shape, which are known as the geometric model of a crystal at equilibrium, and the perspective projection by using Singularity Theory of Smooth Mappings.

(2) In the last half of this research period, from various viewpoint we studied close relationships between a Wulff shape and its convex integrand which is the best efficient continuous function generating the Wulff shape. We have obtained many results on these topics. As of the beginning of June 2016, these results are still under submission.

研究分野：可微分写像の特異点論

キーワード：no-silhouette ウルフ図形 convex integrand 球面極変換 自己双対ウルフ図形 安定 convex integrand 双対 convex integrand 可微分写像の特異点論

1. 研究開始当初の背景

(1) 研究代表者である西村は、酒見憂氏とともに本研究課題の準備的研究内容と言える以下の2篇の論文を著していたところであった。

(a) T. Nishimura and Y. Sakemi, View from Inside, Hokkaido Mathematical Journal, **40** (2011), 361-373.

(b) T. Nishimura and Y. Sakemi, Topological Aspect of Wulff shapes, Journal of the Mathematical Society of Japan, **66** (2014), 89-109.

空間内の物体を内側の点に視点を置いて眺めた時、特異点が現れないような視点があることがある。たとえば、物体が球面の場合、球面内部のどの点に視点を置いて眺めても特異点を持たない透視射影となる。特異点を持たない透視射影となる視点の集合は空間内に置かれた物体に固有の集合であり、物体が球面の場合は球面の内部全体となる。文献(a)ではこのような集合をその物体の **no-silhouette** と名付け、no-silhouette が空集合にならないための条件を可微分写像の特異点論の言葉で記述している。

文献(b)では平衡状態における結晶の幾何学的モデルとして有名な **ウルフ図形** が、さまざまな観点から調べられている。「 C^1 級関数に付随するウルフ図形は決して多胞体にはならない」などということとともに、「no-silhouette の閉包はウルフ図形である」ということも文献(b)において示されている。

(2) 本研究期間初年度には研究分担者であった本田淳史氏(都城高専)は、本研究開始前年である2013年9月にサンパウロ大学サンカルロス校で開催された研究集会"Japanese-Brazilian Singularity Days"において、文献(b)の内容に関して西村が行った講演を聞き、興味を示し、講演内容について西村とのディスカッションが始まった。このディスカッションにより本研究の構想が浮かび上がった。

2. 研究の目的

可微分写像の特異点論を用いて結晶理論と視覚理論の融合を深化させる。そして、本研究課題の研究期間である2年間のうちに、国際的な共同研究に重点を置き、『結晶視覚理論』とでも呼ぶべき新分野創造の基礎固めを行うことを目的としていた。

3. 研究の方法

(1) 研究の方法としては、綿密な研究打ち合わせが基本となる。研究代表者と研究協力者の韓 呼和氏は同一機関に所属しているので、顔を突き合わせての頻繁なディスカッションにより、綿密な研究打ち合わせが可能である。しかし、研究期間初年度は研究分担者

であった本田淳史氏は地理的に大きく離れている場所にいるので、顔を突き合わせてディスカッションをする機会を持つことができるのは限られている。そこで、本田氏とは主として電子メールを多用することにより、綿密な研究打ち合わせを遂行することにした。ディスカッションできる限られた機会を最大限有効に活用するため、ディスカッションが可能な機会の1か月程度前からは、電子メールによるディスカッションの準備をとりわけ念入りに行った。

(2) 「国際的な共同研究に重点を置いて、『結晶視覚理論』とでも呼ぶべき新分野創造の基礎固めを行う」という研究目的のための研究方法としては、「本研究の研究期間後半に横浜国立大学に滞在していた、ブラジルで博士号取得直後の Erica Boizan Batista 氏を含めた西村・韓との3人での日常的なディスカッション」があげられる。この3人での日常的なディスカッションにより、国際的な共同研究は当初の予想以上の進展があった。

(3) 海外で数多く研究発表することも、国際的な共同研究に重点を置いて目的を遂行するためには大事な研究方法のひとつであるので、本研究でも積極的に採用した方法である。

4. 研究成果

研究成果の主なものは、以下の(1)~(6)に分けられる。

(1) 文献(a)で定義された no-silhouette を持つような、滑らかなはめ込み $r: S^1 \rightarrow R^2$ が与えられたとする。次に、各点での接線と同じ角度で回転させることにする。回転角を0度から大きくしていくことにより得られる no-silhouette の閉包のアニメーション(図1を参照。図1は[雑誌論文]の1に載っている図の転用)は

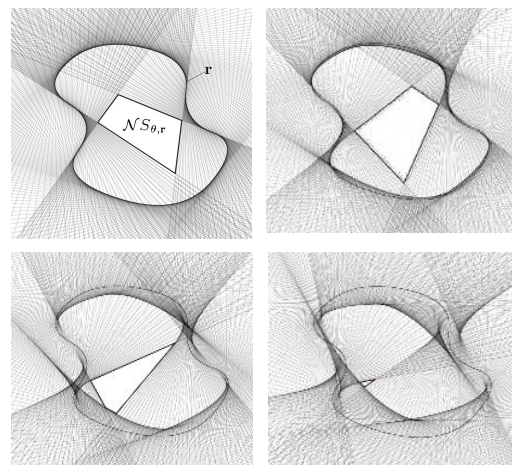


図1: 左上0度, 右上15度, 左下30度, 右下45度

以下の四つの性質を持つことを証明した。

性質 1. no-silhouette の閉包は、回転角が 90 度以下で必ず消滅する。

性質 2. no-silhouette の閉包の境界は、動いている途中では決して線分を含まない。

性質 3. no-silhouette の閉包は、必ず 1 点になって消滅する。

性質 4. 与えられた滑らかなめ込み $r: S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ が変曲点を持たないとすると、回転角の大きい no-silhouette の閉包は回転角の小さい no-silhouette の閉包に必ず含まれる。また、与えられた滑らかなめ込み $r: S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ が変曲点を持つときは、一般には上記のような入れ子状態にはならない。

この研究成果は下記の[雑誌論文]の 1 として既に公表済みである。[雑誌論文]の 1 が掲載されている Journal of Singularities はオープンアクセスジャーナルであり、誰でも自由にダウンロード可能であるので、[雑誌論文]の 1 の著者最終稿を機関リポジトリに置く等の措置は検討していない。さらに、[学会発表]の 11 および 12 として研究代表者により口頭発表済みでもある。

(2) 球面内の図形をその極図形に写すことで定義される**球面極変換**を調べた。球面極変換は以下の性質を持つことを発見した。

性質 1. 球面極変換はリプシッツ写像である。

性質 2. 球面極変換を球面ウルフ図形のなす集合やその閉包に制限すると、球面ウルフ図形のなす集合やその閉包の変換が得られるが、その変換は等距離変換である。

性質 3. 球面極変換を球面凸集合のなす集合やその閉包に制限すると、球面凸集合のなす集合やその閉包の変換が得られるが、その変換は双リプシッツ写像である。しかし、その変換は等距離写像には決してならない。

この研究成果は現在投稿中であるが、視認性を高めるため、国際的な preprint server として名高い arXiv(<http://arxiv.org/>) に preprint 版を置いている(arXiv:1504.02845 [math.MG])。また、[学会発表]の 9,8,6 および 5 として、主として研究協力者の韓 呼和氏により発表済みでもある。

(3) **convex integrand** とは、極座標表示で描かれたグラフを反転させると凸図形の境界になるような、球面上の連続関数のことである。convex integrand がウルフ図形と 1 対 1 に対応する概念であることはよく知られている。また、「convex integrand が $C^{1,1}$ 級であることとその convex integrand に付随するウルフ図形が一様凸であるという性質は同値な性質である」ということが、F. Morgan, The cone over the Clifford torus in

\mathbb{R}^4 is F-minimizing, Math. Ann., **289** (1991), 341-354 により示されていた。研究代表者と研究協力者の韓 呼和氏は F. Morgan の結果の完全な拡張に成功し、「convex integrand が C^1 級であることとその convex integrand に付随するウルフ図形が狭義凸であることは同値な性質である」ことを示した。この結果は、(b)で既に示している「 C^1 級関数に付随するウルフ図形は決して多胞体にはならない」を自明な系として含むなど、多くの応用を持っている。

(3)の研究成果は現在投稿中であるが、視認性を高めるため、国際的な preprint server として名高い arXiv(<http://arxiv.org/>) に preprint 版を置いている(arXiv:1507.05162 [math.MG])。また、[学会発表]の 7,4,3 および 1 として、研究代表者あるいは研究協力者により発表済みでもある。

(4) **自己双対ウルフ図形**はウルフ図形から自然に得られる球面ウルフ図形の言葉で特徴づけられることを発遣した。具体的には、「ウルフ図形が自己双対であることと、そのウルフ図形から得られる球面ウルフ図形が幅 $1/2$ の等幅であることは同値な条件である」ということを示した。この特徴づけにより、自己双対ウルフ図形は非可算無限個存在することが容易にわかる(図 2 を参照)。

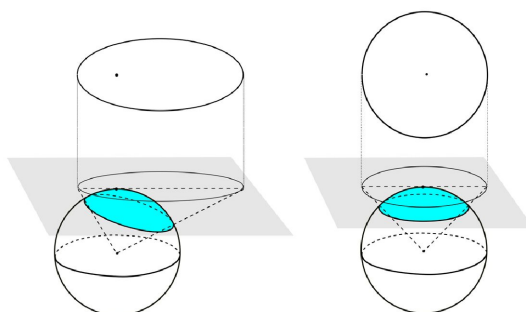


図 2 : 自己双対ウルフ図形
と幅 $1/2$ の等幅球面ウルフ図形

(4)の研究成果は現在投稿中であるが、視認性を高めるため、preprint server として国際的に著名な arXiv(<http://arxiv.org/>) に preprint 版を置いている(arXiv:1511.04165 [math.MG])。また、[学会発表]の 2 として、研究協力者の韓 呼和氏により発表済みでもある。

(5) 無限回微分可能な convex integrand からなる関数空間は、ホイットニー位相と呼ばれる自然な位相により位相空間となる。この位相空間の中で、**安定な convex integrand** からなる部分空間は稠密であることを示した。

(5)の研究成果は、研究協力者である韓 呼和氏、横浜国立大学に外国人客員研究員として滞在していた Erica Boizan Batista 氏との

三人による国際共同研究の成果であり現在投稿中である。視認性を高めるため、preprint server として国際的に著名な arXiv(<http://arxiv.org/>) に preprint 版を置いている(arXiv:1601.06347 [math.GT])。この成果が出来上がったのはごく最近(2016年1月)のことであるので、学会発表はまだしていない。

(6) (5)の続きとして、convex integrand が安定であれば、その**双対 convex integrand** も安定でなければならないことを示した。さらに、安定な convex integrand のモース特異点を とすると、 $-$ は双対 convex integrand のモース特異点となること、および、安定な convex integrand のモース特異点におけるモース指数を i とすると、双対 convex integrand のモース特異点 $-$ のモース指数は $(n - i)$ となることも示した。ここに、 n は convex integrand の定義域である単位球面 S^n の次元である。

(6)の研究成果も、研究協力者である韓 呼和氏、横浜国立大学に外国人客員研究員として滞在していた Erica Boizan Batista 氏との三人による国際共同研究の成果であり現在投稿中である。視認性を高めるため、preprint server として国際的に広く知られている arXiv(<http://arxiv.org/>) に preprint 版を置いている(arXiv:1603.08331 [math.GT])。この成果が出来上がったのもごく最近(2016年3月)のことであるので、学会発表はまだしていない。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

1. Daisuke Kagatsume and Takashi Nishimura, Aperture of plane curves, *Journal of Singularities*, **12** (2015), 80-91. DOI: 10.5427/jsing.2015.12e. 査読あり。

[学会発表](計12件)

1. 韓 呼和・西村尚史, Strictly convex Wulff shapes and C^1 convex integrands, 日本数学会年会, 2016年3月17日, 筑波大学(茨城県・つくば市)。
2. 韓 呼和, Self-dual Wulff shapes and spherical convex bodies of constant width $1/2$, 研究集会「幾何学と特異点」, 2016年3月4日, 東京学芸大学(東京都・小金井市)。
3. Huhe Han, Strictly convex Wulff shapes and C^1 convex integrands, 第12回数学総合若手研究集会, 2016年3月2日, 北海道大学(北海道・札幌市)。
4. Huhe Han, Strictly convex Wulff shapes and C^1 convex integrands, 研究集会「接

触構造・特異点・微分方程式及びその周辺」, 2016年1月23日, 金沢大学(石川県・金沢市)。

5. 韓 呼和・西村尚史, The spherical dual transform is an isometry for spherical Wulff shapes, 日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月15日, 京都産業大学(京都府・京都市)。
6. Huhe Han, The spherical dual transform is an isometry for spherical Wulff shapes, 2015年9月10日, ワルシャワ(ポーランド)。
7. Takashi Nishimura, Strictly convex Wulff shapes and C^1 convex integrands, 2015年9月7日, ワルシャワ(ポーランド)。
8. Huhe Han, The spherical dual transform is an isometry for spherical Wulff shapes, 埼玉大学木曜セミナー, 2015年7月15日, 埼玉大学(埼玉県・浦和市)。
9. Huhe Han, The spherical dual transform is an isometry for spherical Wulff shapes, "Singularities in Generic Geometry and its Applications---Kobe - Kyoto 2015(Valencia IV)---", 2015年6月5日, 神戸大学(兵庫県・神戸市)。
10. Takashi Nishimura, Introduction to topological study of Wulff shapes, "Banach Center Conferences, CAS Workshop - Analytic and Algebraic Singularities", 2014年11月3日, ワルシャワ(ポーランド)。
11. Takashi Nishimura, Aperture of plane curves, "Banach Center Conferences, CAS Workshop - Analytic and Algebraic Singularities", 2014年11月3日, ワルシャワ(ポーランド)。
12. Takashi Nishimura, Aperture of plane curves, "Workshop on Singularities, Geometry, Topology and Related topics", 2014年9月3日, 長春(中国)。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西村 尚史 (NISHIMURA, Takashi)
横浜国立大学・大学院環境情報研究院・教授
研究者番号: 80189307

(2) 研究分担者

本田 淳史 (HONDA, Atsufumi)
都城工業高等専門学校・講師
研究者番号: 90708611
(平成26年度まで研究分担者)

(3) 研究協力者

韓 呼和 (HAN, Huhe)
横浜国立大学・大学院環境情報学府・大学院生