

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 3 日現在

機関番号：14501

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2015

課題番号：26610040

研究課題名(和文) ガルビン予想の解決にむけての研究

研究課題名(英文) Research toward a solution of Galvin's conjecture

研究代表者

淵野 昌 (Fuchino, Sakae)

神戸大学・システム情報学研究科・教授

研究者番号：30292098

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：ガルビン予想は、「任意の半順序集合 $X$ の濃度 $\leq 1$ の部分順序が可算個の連鎖の和集合となっているとき、 $X$ 自身も可算個の連鎖の和集合になる」という主張の無矛盾性を問うものである。本研究では、ラドー予想、ガルビン予想等に関する反映数を導入し、これらの関連を調べた。ラドー予想やガルビン予想の成立は、対応する反映数が $\leq 2$ になることと同値である。 $\omega$ -closedな強制拡大に関して、可算個の連鎖の和集合にならない、という性質が保存される半順序のクラスに対しては、対応する反映数が $\leq 2$ となることも、連続体濃度が大きなものである状況でそれより小さなものとなることも無矛盾であることを示した。

研究成果の概要(英文)：Galvin's Conjecture is the assertion "any partial ordering  $X$  such that any subordering of  $X$  of size  $\leq 1$  is a union of countably many chains is by itself a union of countably many chains". Its consistency is still open. In our research, we introduced the reflection numbers corresponding to Rado's conjecture, Galvin's conjecture etc. and studied the relationships of between these cardinal numbers. Galvin's Conjecture is characterized by the corresponding reflection number being  $\leq 2$ .

We showed the consistency of a restricted form of Galvin's conjecture claiming that the Galvin type reflection number can be  $\leq 2$  for the class of partial ordering for which the property that the partial ordering is not a union of countably many chains is preserved by  $\omega$ -closed forcing and that for this class it is also consistent that the reflection number is less than or equal to the continuum while the continuum is fairly large.

研究分野：数理論理学，公理的集合論

キーワード：反映原理 無限ゲーム 彩色数 強コンパクト基数 1-強コンパクト基数 巨大基数 レヴィ崩壊

## 1. 研究開始当初の背景

ガルビン予想は集合論的反映原理の一つで、「すべての半順序集合  $(X, \leq)$  について、それが可算個の  $(\leq)$  に関する連鎖の和集合として表わされないなら、濃度が  $\aleph_1$  の  $X$  の部分順序で可算個の連鎖の和集合として表われないものが存在する」ことを主張するものである。

ガルビン予想が集合論と抵触しない原理かどうかは20年以上にわたって未解決である。ガルビン予想と類似の反映原理に、ラドー予想がある。これは「任意の木  $T$  が special でないなら、 $T$  の濃度  $\aleph_1$  の部分木で special でないものが存在する」という主張である。ここに  $T$  が special とは  $T$  が可算個の反鎖の和集合として表わせることである。

ガルビン予想はラドー予想を導くことが容易に示せるが、ラドー予想については、その無矛盾性が強コンパクト基数の存在の仮定から導けることが知られている ([2])。一方、グラフの彩色数 (chromatic number) の非可算性に関する同様の反映原理 (任意のグラフ  $G$  についてその彩色数が非可算なら、濃度  $\aleph_1$  の  $G$  の部分グラフで彩色数が非可算なもの存在する) は、ラドー予想を導くが、この原理については、集合論と抵触することが Erdős と Hajnal による1960年代の結果から導かれる。

研究代表者はラドー予想から導くことのできる Fodor-type Reflection Principle (FRP) に関連した研究を行ってきた ([3],[4],[5]等を参照)。FRP のもとの定式化 (研究代表者と Lajos Soukup によって1997年頃に定式化された) は純粋に集合論的なもので、Fodor の補題と類似の主張を含むものとなっており、これが命名の由来でもあるのだが、この原理の様々な特徴付けが研究代表者らにより得られており、その中の一つは、「任意のグラフ  $G$  に対し、その塗色数 (coloring number) が非可算なら、濃度  $\aleph_1$  の  $G$  の部分グラフで塗色数が非可算となるものが存在する」という彩色数の非可算性の反映原理と類似性の高い命題である。FRP はラドー予想より格段に弱い原理である。例えば、研究代表らの結果から FRP は連続体の濃度にほとんど何の制限も加えないことが知られている ([3]、これに対し、ラドー予想は連続体の濃度が  $\aleph_2$  以下になることを帰結することが Todorcevic により1990年代に示されている)。一方、FRP は (したがって FRP を導く他のすべての反映原理も) 大きな巨大基数の無矛盾性の強さを内包していることが知られている: FEP は square principles の global negation を導くからである。さらに、研究代表者らは、FRP が、研究代表者が ADS と名付けた square principles を弱めた原理の global negation と同値になることを示している ([5])。

## 2. 研究の目的

「研究開始当初の背景」で触れた、ガルビン予想等を含む、様々な集合論的反映原理がこれまでに研究されてきた。これらの反映原理や絶対性の性質は巨大基数の性質を  $\aleph_2$  のような小さな基数が実現しているような集合論のモデルの性質の特徴づけとなっていると考えることができる。ガルビン予想を含めて、現在までに考察されている様々な反映原理の多くは、既に述べたように、純粋に集合論的無限組合せ論的な内容を持つだけでなく、無限グラフ、位相空間、木孝三などの数学対象に関する自然な命題として特徴づけできるものになっている。

これらの性質の研究から、対応する数学的な独立命題の真偽の持つ意味の何らかの評価につながるような結果が得られることが本研究の背後にある大きな目標である。

本研究でより具体的な研究目的としてかかげたガルビン予想の無矛盾性の決定は、このような研究における重要な足掛りの一つである。特に、ラドー予想が無矛盾性で、対応するグラフの彩色数の非可算性の  $\aleph_2$  未満への反映原理が矛盾することの違いの意味が、ガルビン予想の無矛盾性に関する研究を進めることでより明らかになることが期待される。

## 3. 研究の方法

本研究は、数学の研究であるため、基本的には研究の方法は横になって考える、ということに尽きる。研究組織内での研究討論や、研究集会、ワークショップに参加した折のディスカッションは非常に重要である。

## 4. 研究成果

研究ではガルビン予想そのものの解決には至らなかったが、この予想を弱めた幾つかの主張についての無矛盾性の結果を含む、いくつかの関連の結果が得られた。

ガルビン予想の帰結のうち最も強い反映原理の一つと考えられるラドー予想についての理解を深めることは、ガルビン予想の解決にむけてのステップの一つになりえるが、これに関し、幾つかの結果を得た:

ラドー予想は、Martins Maximal (MM) とは矛盾することが知られている。MM と矛盾しない、反映原理のうち、ラドー予想の帰結とならないような強い原理がいくつか知られているが、これらの原理とラドー予想の共通の帰結となっているような新しい反映原理を幾つか発見し、これらの原理とラドー予想の関係についての考察を行った ([7])。正規直交基底を持たない前ヒルベルト空間の存在は、Halmos により1970年代に示されているが、Halmos の構成したそのような pathological な前ヒルベルト空間とは別の

系列の pathological な前ヒルベルト空間の構成法を与え, "pathological な前ヒルベルト空間である" という性質に関する反映原理で, ラドー予想の帰結である FRP と同値になる命題を定式化した ([12]). Singular Cardinal Hypothesis (SCH) は FRP から導かれることが知られている ([4]) が, この証明のより直接的な別証が得られた ([9]).

リスト彩色数 (list chromatic number) の非可算性に関する反映原理が他の反映原理と異なる挙動をすることは既に研究代表者らの [6] で確かめられていたが, これに関する研究を更に進めることができた ([8]).

ガルビン予想を含む, 研究開始当初の背景で述べたいいくつかの反映原理は, "非可算濃度の対象で起っている現象が濃度  $\kappa_1$  の部分構造でも既に起っている", という表現の形式を持つものだったが, このような反映原理のそれぞれに対して, "非可算濃度の対象で起っている現象が濃度が  $\kappa$  未満の部分構造でも常に既に起るような  $\kappa$  のうちの最小のもの" と言いなおして得られる基数不変量を, 反映基数 (reflection cardinals) と呼ぶことにすると, このような反映基数の間の関係性についての関係性について幾つかの新しい知見が得られた ([10]). 特に, このような反映基数は  $\omega_1$ -強コンパクト基数より小さいか等しくなることが確認された.

各反映原理に対応する反映基数が連続体濃度以下になる (非可算濃度の対象で起っている現象が濃度未満の部分構造でも常に起っている) という反映原理を作ることができるが, これに関しては, そのようにして作ったハンブルガー問題 (Hamburger's Problem, 距離付け可能でない第一可算な距離空間は濃度  $\kappa_2$  未満のサイズの距離付け可能でない部分空間を持つ --- この主張についてもそれが無矛盾であるかどうかは未解決である) に対応する反映原理の無矛盾性 (連続体反映原理) が, 巨大基数の公理から得られることは既に知られていた ([1], [1] では超コンパクト基数を仮定しているが強コンパクト基数の仮定で十分である). 本研究では, 反映原理の多くについて, それが問題としている性質が  $\sigma$ -closed な半順序に関して絶対的なら, このことから, 同じ性質が Cohen 強制に関して絶対的になることを示した. このことから, 例えばラドー予想の連続体反映原理版の無矛盾性が得られる. 同様の考察から, ガルビン予想を  $\sigma$ -closed な強制順序に関して絶対的な可算個の連鎖の和集合として表わせないような半順序に制限して得られる反映原理やその連続体反映原理版, またグラフの彩色数の非可算性に関する反映原理の同様なバリエーションはすべて, 強コンパクト基数の存在から強制できることが示せた ([10]).

反映原理の研究は "集合論の公理系の正

しい拡大は何か?" という集合論の最終問題に連なる問題群の中に位置するものである. このような集合論研究の大きな議論で, 集合論の様々なモデルの総体を集合論的多元宇宙として扱おう, set-theoretic multiverse という視点が最近脚光を浴びてきている. 研究代表者らは, 本研究の枠内で行った, set-theoretic multiverse の研究に関する論文の最終版 [11] を完成させた.

集合論の通常の公理系から独立な命題 (新しい公理の候補) はそれと同値な数学的命題の多さによって, その prominence (重要性) を測ることができるであろう. 研究代表者はこの視点から, 東京で開かれた数理論理学の国際会議での招待講演において, FRP や他の反映原理の重要性を論じたが, そこでの議論を下とする論文 [13] を準備中である. 同様の本研究の spin-off として, 集合論の無矛盾性の強さの, ゲーデルの speedup theorem との関連での数学の哲学的な議論の発表を準備中である ([14]).

#### 参考文献

- [1] Allan Dow, Franklin D. Tall and W. A. R. Weiss, New proofs of the consistency of the normal Moore space conjecture I, II, *Topology and its Applications*, 37, 1990 33–51, pp. 115–129.
- [2] Stevo Todorćević, Conjectures of Rado and Chang and Cardinal Arithmetic, in: *Finite and Infinite Sets in Combinatorics* (N. W. Sauer et al., eds), Kluwer Acad. Publ., 1993, pp. 385–398.
- [3] Sakaé Fuchino, István Juhász, Lajos Soukup, Zoltán Szentmiklóssy and Toshimichi Usuba, Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizable and meta-Lindelöfness, *Topology and its Applications*, Vol. 157, 8, 2010, pp. 1415–1429.
- [4] Sakaé Fuchino and Assaf Rinot, Openly generated Boolean algebras and the Fodor-type Reflection Principle, *Fundamenta Mathematicae* 212, 2011, pp. 261–283.
- [5] Sakaé Fuchino, Hiroshi Sakai, Lajos Soukup, More about Fodor-type reflection principle, submitted (preprint: <http://fuchino.ddo.jp/papers/moreFRP.pdf>)
- [6] Sakaé Fuchino and Hiroshi Sakai, On reflection and non-reflection of countable list-chromatic number of graphs, *RIMS Kôkyûroku* No. 1790, 2012, pp. 31–44.
- [7] Sakaé Fuchino and Toshimichi Usuba, A reflection principle formulated in terms of games, *RIMS Kôkyûroku*, No. 1895, 2014, pp. 37–47, (論文の拡張版: <http://fuchino.ddo.jp/papers/RIMS-RP-x.pdf>)

[8] Toshimichi Usuba, Reflection Principle on list chromatic number of graphs,

[http://researchmap.jp/?action=cv\\_download\\_main&upload\\_id=68000](http://researchmap.jp/?action=cv_download_main&upload_id=68000)

[9] Hiroshi Sakai, Simple proofs of SCH from reflection principles without using better scales, Archive for Mathematical Logic, 54(5), 2015, pp. 639–647.

[10] Sakaé Fuchino, On reflection numbers under large continuum, RIMS Kôkyûroku, 1988, 2016, pp. 416, (論文の拡張版: <http://fuchino.ddo.jp/papers/RIMS15-large-continuum-x.pdf>).

[11] Sy-David Friedman, Sakaé Fuchino and Hiroshi Sakai, On set-generic multiverse, submitted (プレプリント: <http://fuchino.ddo.jp/papers/FrFuRoSa-e.pdf>).

[12] Sakaé Fuchino, Pre-Hilbert spaces without orthonormal bases, preprint (<http://fuchino.ddo.jp/papers/pre-hilbert-sp.pdf>).

[13] Sakaé Fuchino, Reflection Principles as reverse mathematical fixed points over ZFC, in preparation.

[14] Sakaé Fuchino, Set models of set-theory and foundations of set-theory, Preprint

(<http://fuchino.ddo.jp/notes/woodin-inc-ompl-e.pdf>).

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

① Sakaé Fuchino, On reflection numbers under large continuum, RIMS Kôkyûroku, 査読無, No.1988, 2016, pp.1–16, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kyuroku/contents/pdf/1988-01.pdf>

② Joan Bagaria, Joel David Hamkins, Konstantinos Tsapronis and Toshimichi Usuba, Superstrong and other cardinals are never indestructible, Archive for Mathematical Logic, 検読有, Vol.55, No.1-2, 2016, pp.135, DOI: 10.1007/s00153-015-0458-3

③ Joan Bagaria, Menachem Magidor and Hiroshi Sakai, Reflection and indescribability in the constructible universe Israel Journal of Mathematics, 検読有, 208(1) 2015, 1–11, DOI: 10.1007/s11856-015-1191-7

④ Hiroshi Sakai, Simple proofs of SCH

from reflection principles without using better scales, Archive for Mathematical Logic, 検読有, 54(5), 2015, 639–647, DOI: 10.1007/s00153-015-0432-0

⑤ Hiroshi Sakai and Boban Velickovic, Stationary reflection principles and two cardinal tree properties, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 検読有, 14(1) 2015, 69–85, DOI:<http://dx.doi.org/10.1017/S1474748013000315>

⑥ Sakaé Fuchino and Toshimichi Usuba, A reflection principle formulated in terms of games, RIMS Kôkyûroku, 査読無, No.1895, 2014, pp.37–47, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kyuroku/contents/pdf/1895-05.pdf>

瀧野 昌, "コーエンの強制法" と強制法, 数理科学, 査読無, 2014年10月号, No.616 2014, pp.75–83.

[学会発表] (計 25 件)

① Sakaé Fuchino, Reflection numbers under large continuum, Winter School in Abstract Analysis 2016, 2016年2月5日, Hejnice(Czech Republic)

② Sakaé Fuchino, Reflection numbers of some combinatorial and topological properties, Mathematical Foundational and Computational Aspects of the Higher Infinite, 2015年11月17日, Cambridge (England)

③ Sakaé Fuchino, A reflection principle as a reverse mathematical fixed point, Computability Theory and Foundation of Mathematics 2015, 2015年9月11日, 東京工業大学(東京都・大田区)

④ Hiroshi Sakai, Stationary reflection principles and two cardinal tree properties, BLAST2015@UNT, 2015年6月9日, Denton (TX, USA)

⑤ Toshimichi Usuba, Large regular Lindelöf spaces with points  $G_\delta$ , IMS Workshop "Sets and Computations", 2015年4月8日, Singapore (Singapore)

⑥ Sakaé Fuchino, Reflection principles in terms of winning strategy of certain infinite games, IMS Workshop "Sets and Computations", 2015年4月7日, Singapore (Singapore)

⑦ Hiroshi Sakai, Proof of SCH from

reflection principles without using scales,  
IMS Workshop "Sets and Computations",  
2015年4月2日, Singapore (Singapore)

〔図書〕(計 2件)

① ヘルマン・ヴァイル著, 湊野昌, 田中尚夫 翻訳/解説, 連続体, 日本評論社, 2016, 199

② 佐野 勝彦, 倉橋 太志, 薄葉 季路, 黒川英徳, 菊池誠 共著, 数学における証明と真理, 共立出版, 2016, 158-219

〔その他〕

ホームページ等

<http://fuchino.ddo.jp/grants.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

湊野 昌 (FUCHINO, Sakae)

神戸大学・システム情報学研究科・教授

研究者番号: 30292098

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号:

### (3) 連携研究者

酒井 拓史 (SAKAI, Hiroshi)

神戸大学・システム情報学研究科・准教授

研究者番号: 70468239

薄葉 季路 (USUBA, Toshimichi)

神戸大学・自然科学系先端融合研究環・助教

研究者番号: 10513632