

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2016

課題番号：26610072

研究課題名（和文）リー・ヤンゼロとQCDの相構造 - 実験と理論と数値計算の総合的アプローチ

研究課題名（英文）Lee-Yang zeros and QCD Phase structure -- Unified Approach of Experiments, Theories and Numerical Analyses

研究代表者

中村 純 (Nakamura, Atsushi)

大阪大学・核物理研究センター・協同研究員

研究者番号：30130876

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,900,000円

研究成果の概要（和文）：QCD 相構造を明らかにするために、高エネルギー重イオン反応の多重度分布の実験データ及び格子QCDからカノニカル分配関数を求めた。その両者からリー・ヤンゼロ分布を計算した。ここで必要な高精度計算手法と正確な高次多項式からゼロ点を求める手法を開発した。相転移を見出すための実験のエネルギー領域を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：In order to study the QCD phase structure, we have determined the canonical partition function both from high energy heavy ion collisions and the lattice QCD. Using these canonical partition functions we have calculate the Lee-Yang zeros in both experimental and numerical approaches. In these studies, we have developed a new algorithm to obtain zeros of high order polynomial functions with multi-precision calculations. We show regions where experiments should pursue for detecting the QCD phase transition.

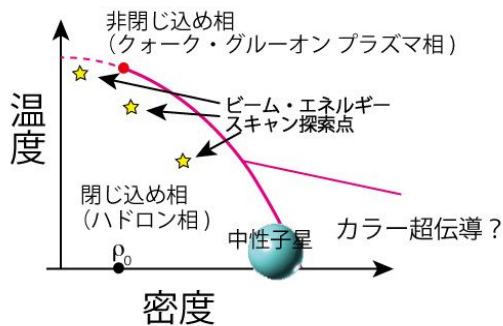
研究分野：原子核物理学

キーワード：QCD 格子ゲージ理論 高エネルギー重イオン反応 相転移 多倍長計算

1. 研究開始当初の背景

近年、超高温、超高密度状態の QCD が豊富な相を持つことが実験的、現象論的に明らかになりつつあり、このような極限状態 QCD の振る舞いを格子 QCD による第一原理計算から研究することが重要となっている。

特に、太陽質量の 2 倍に近い中性子星の発見など観測の大きな進展により、有限密度核物質の信頼度の高い研究の重要性が高まっている。日本の J-PARC、RIKEN-RIBF、ドイツの GSI-FAIR では、核内密度  $\rho_0$  からその数倍の密度までのデータが取れる可能性がある。そして、高密度では非閉じ込め相やカラー超伝導相など QCD は豊富な相を持つことが予想されている。クォーク・ハドロン系の研究においては、格子 QCD 計算がもっとも信頼度の高い第一原理計算であるが、しかし、有限密度格子 QCD シミュレーションには、いくつかの例外を除いて「符号問題」という困難が存在する。このため、有限密度 QCD の理論的予想は現象論的なモデルによらざるを得なかった。



2. 研究の目的

本研究の目的は、高エネルギー重イオン反応の多重分布の実験データから QCD の相構造を明らかにすることである。そのために、次の 2 つの手法を開発、確立する: (1) 多重分布からカノニカル分配関数  $Z_n$  を求める。(2) 得られた  $Z_n$  から高精度計算によりリー・ヤンゼロ分布を計算する。これにより、現在の実験データからリー・ヤンゼロ分布を求め、相転移の情報を得る。

現在、実験の測定点が相転移のそばにいるかどうかは、粒子数などのモーメントを計算することによって行われることが多い。しかし、明確なピークが出る場合を除き、モデルと比較して判断せざるを得ない。本研究計画ではリー・ヤンゼロを計算し、その分布を調べることで相転移線に近づいているかどうかを判定する。リー・ヤンゼロは相転移があるときは複素フガシティ面の正の実軸にゼロ点が集積し、クロスオーバーでは実軸の手前で分布が中断する。

3. 研究の方法

本研究では複素グランドカノニカル分配関数  $Z(\xi)$  の複素フガシティ面でのゼロ点の探索にコーシーの留数定理を利用する。まず  $Z_n$  から次のように関数  $F$  と  $\log F$  の微分を構築する。 $Z(\xi)$  と  $F(\xi)$  のゼロ点は  $\xi = 0$  では一致。 $\xi = 0$  ではゼロ点はない)

$$F(x) = x^N Z(x) = Z_{-N} + Z_{-N+1}x + \dots + Z_N x^N$$

$$= \prod (x - a_k)$$

この関数  $F$  のゼロ点、すなわち

$$F(a_k) = 0 \text{ を満たす複素数 } a_k$$

を見つければ良い。

2 次、3 次の場合は根の公式から直ちに答えは得られる。(原理的には 5 次まではもとまる)しかし、高次多項式に対しては、これは不良設定問題 (ill-posed problem) としてよく知られている。すなわち、入力のごくわずかなズレが結果を真の値から大きくずらしてしまい、安定した解が得られない。

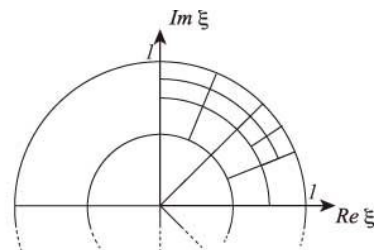
4. 研究成果

この問題に対し、以下のような手法を発見した。

$$\frac{d \log F}{dx} = \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = \sum_k \frac{1}{x - a_k}$$

$F$  の代わりに  $F$  の対数の微分を考える。これは上式第 2 項のようになり、多項式  $F$  の表式から直ちに計算することができる。そして、我々の求めるリー・ヤンゼロは、この式の一位の極となる。

コーシーの定理により複素平面上の閉じた経路の積分を行えば、その経路内の極の数がもとまる。このことを利用して  $a_k$  の値を正確に求めることができる。

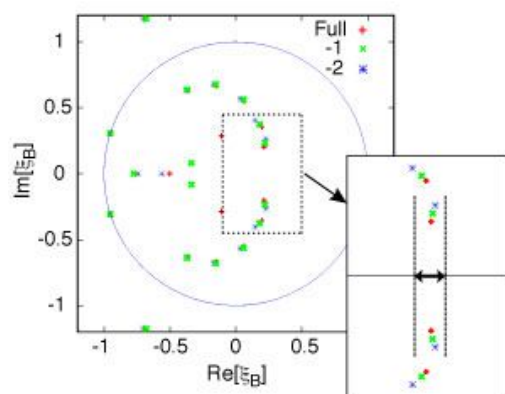


すなわち、図のように単位円を経路として留数計算を行えば、この円の中の極の個数もとまる。次にこの円をいくつか分割してそれぞれの領域の中での極の個数を求める。もちろん、その合計は単位円の中の極の数に一致する。

もしある領域内にある極の数がゼロのときはその領域での計算はそこで終了する。ゼロでない領域については、さらにいくつか分割していく。(実際には4個を選んだ)

この分割を繰り返していくことで任意の精度で極の値を求めることができる。

実際の計算では多項式Fの係数であるカノニカル分配関数が何十桁も変化するため、多倍長で正確に計算する必要がある。



図は RHIC 加速器で得られた高エネルギー重イオン反応における陽子分布からカノニカル分配関数を求め、それから求めたリーヤンゼロである。実軸正の部分にゼロ点が収束していくように見える。もし系のサイズを大きくした時に実際にそのような振舞いが見られれば、そこが相転移点となる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

(1) V. A. Goy, V. Bornyakov, D. Boyda, A. Molochkov, A. Nakamura, A. Nikolaev, V. Zakharov

Sign problem in finite density lattice QCD  
Progress of Theoretical and Experimental Physics, 031D01

DOI: 10.1093/ptep/ptx018

(2) D. L. Boyda, V. G. Bornyakov, V. A. Goy, V. I. Zakharov, A. V. Molochkov, Atsushi Nakamura, A. A. Nikolaev

Novel approach to deriving the canonical generating functional in lattice QCD at a finite chemical potential

JETP Letters 104, 657-661

DOI: 10.1134/S0021364016220069

(3) Atsushi Nakamura, Shotaro Oka, Yusuke Taniguchi

QCD phase transition at real chemical potential with canonical approach

JHEP02(2016)054

DOI: 10.1007/JHEP02(2016)054

(4) Ryutaro Fukuda, Atsushi Nakamura, and Shotaro Oka

Canonical approach to finite density QCD with multiple precision computation

Phys. Rev. D 93, 094508 (2016)

arXiv:1504.06351

DOI:http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.93.094508

(5) A. Nakamura and K. Nagata

Probing QCD phase structure using baryon multiplicity distribution

Prog. Theor. Exp. Phys. 2016, 033D01 (17 pages), DOI: 10.1093/ptep/ptw013

(6) Kenji Morita, Atsushi Nakamura

Stable Yang-Lee zeros in truncated fugacity series from net-baryon number multiplicity distribution

Phys. Rev. D 92, 114507 (2015)

(7) K. Nagata, K. Kashiwa, A. Nakamura, S. M. Nishigaki

Lee-Yang zero distribution of high temperature QCD and Roberge-Weiss phase transition

Phys. Rev. D 91 (2015) 094507,

arXiv:1410.0783

(8) T. Makiyama, Y. Sakai, T. Saito, M. Ishii, J. Takahashi, K. Kashiwa, H. Kouno, A. Nakamura, M. Yahiro

Phase structure of two-color QCD at real and imaginary chemical potentials: lattice simulations and model analyses

Phys. Rev. D 93, 014505 (2016),

arXiv:1502.06191

[学会発表](計 5 件)

1) Atsushi Nakamura

"How to use Lattice and Experimental data for QCD Critical Point Search"

CPOD 2016, Wrocław, Poland May 30th - June 4th, 2016

2) 中村純

多倍長計算が開く格子 QCD の新しい可能性  
日本応用数学会「多倍長精度浮動小数点演算の高速化手法と応用」

9月12日北九州市

3) Atsushi Nakamura  
QCD phase structure and  
J-PARC experiments  
J-PARC Workshop, Inha, Korea June 7-10,  
2016

4) Atsushi Nakamura  
"QCD at Extreme conditions -- Numerical  
Study of Quark/Gluon World at Finite  
Temperature and Density  
"  
Physics of Fundamental Interactions"  
dedicated to the 60th anniversary of JINR  
April 12-15 2016, DUBNA Moscow,

5) Atsushi Nakamura  
"Lee-Yang zeros and QCD Phase Structure"  
Monte Carlo methods in computer  
simulations of complex systems  
Far Eastern Federal University,  
2015.10.21

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕  
ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中村 純 (Nakamura Atsushi)  
大阪大学・核物理研究センター・協同研究  
員  
研究者番号：30130876

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：

(4) 研究協力者

( )