

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 12 日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2014～2015

課題番号：26630051

研究課題名(和文) 圧縮性ナビエ ストークス方程式に対する非線形すべり境界条件

研究課題名(英文) Nonlinear slip boundary conditions for the compressible Navier-Stokes equations

研究代表者

青木 一生 (Aoki, Kazuo)

京都大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10115777

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：圧縮性ナビエ ストークス方程式に対して、ボルツマン方程式をもとに正しいすべり境界条件を数学的に根拠のある形で導出し、広い条件のもとでボルツマン方程式系に取って代わる流体力学方程式系を確立した。これにより、クヌーセン数が小さい場合の低圧気体や微小系における気体の非線形現象の取り扱いが容易になった。また、この系を用いて、希薄気体中を伝わる非線形音波、2平面壁間の希薄気体における非線形定在波の形成、復元力が働く気体中の平板の減衰振動の問題などを長時間にわたって数値解析し、様々な現象を解明した。

研究成果の概要(英文)：The correct slip boundary conditions for the compressible Navier-Stokes equations were derived in a mathematically systematic way on the basis of the Boltzmann equation, so that the fluid-dynamic system that replaces the Boltzmann system under wide conditions has been established. This facilitates the treatment of the nonlinear phenomena in low-pressure gases and gases in microscales with small Knudsen numbers. On the basis of this system, some basic problems, such as the propagation of nonlinear acoustic waves in a rarefied gas, the formation of stationary waves in a rarefied gas between two plates, the decay of the oscillation of a plate in a gas subjecting to a restoring force, have been analyzed numerically over a long time, and some peculiar phenomena have been clarified.

研究分野：分子気体力学

キーワード：ボルツマン方程式 ナビエ ストークス方程式 すべり境界条件 希薄気体力学 非平衡気体 気体
分子運動論

1. 研究開始当初の背景

マイクロスケールの気体では、分子同士の衝突が十分でないため、気体は局所的に非平衡状態にある。したがって、通常の流体力学は適用できず、ボルツマン方程式を基礎とする分子気体力学を用いなければならない。しかし、気体分子の平均自由行程が流路幅に比べて小さく、局所非平衡の度合いが小さい場合には、すなわち、平均自由行程と代表長さ（たとえば流路幅）の比で定義されるクヌーセン数が小さいときには、流体力学方程式にすべり境界条件を組み合わせるにより、非平衡の効果を正しく取り入れることができる。

気体の圧縮性がほとんど無視できる場合のすべり境界条件は、既に曾根によって理論的に確立されており、代表者（青木）もその過程で貢献してきた。しかし圧縮性が重要となる場合には、ナビエ-ストークス方程式のすべり境界条件は、まだ理論的説得力のある形では導出されていなかった。そのため、すべての応用研究では、誤ったすべり境界条件が用いられていた。この現状を打開するのが本研究の目的であった。青木らは、以前に単純な1次元定常問題に対して、ボルツマン方程式から圧縮性ナビエ-ストークス方程式とその正しいすべり境界条件を系統的理論によって導いた経験がある。本研究はこれらの研究を基礎とし、それを一般化するものである。

2. 研究の目的

近年のマイクロ・ナノ工学の急速な発展に伴い、微細構造内での気体の流れの解明が、幅広い工学分野で重要な研究課題になっている。とくに最近では、大きな温度変化や速度変化を伴う流れの解明が必要となっており、圧縮性流体に対するナビエ-ストークス方程式が、いわゆるすべり境界条件と組み合わせ用いられることが多い。しかし、これまで一般に用いられてきたすべり境界条件には、気体の圧縮性、大きな温度変化、境界の曲率などが正しく取り入れられておらず、結果は信頼性の低いものであった。本研究の目的は、ボルツマン方程式をもとに、圧縮性ナビエ-ストークス方程式に対する正しいすべり境界条件を、数学的に根拠のある形で導出し、それを利用しやすい形に整理することであった。

3. 研究の方法

(1) 圧縮性ナビエ-ストークス方程式の導出

圧縮性ナビエ-ストークス方程式は、ボルツマン方程式からチャプマン-エンスコグ展開によって導出される。このことは、周知の古典的事実であるが、チャプマン-エンスコグ展開は系統的漸近展開ではなく、ある意味で作爲的展開であるため、注意を要する。研究の第一歩として、同展開でクヌーセン数の2次以上を無視した速度分布関数が、実際にボルツマン方程式を、クヌーセン数の2次程度の誤差を含んで満たすこと、それが本当に圧縮性ナビエ-ストークス方程式を与えること、を確認した。同様の過程を多原子分子気体に対するボルツマン方程式に対しても行い、それに対する圧縮性ナビエ-ストークス方程式を確立した。

(2) クヌーセン層問題の導出とすべり境界条件の構築

上記(1)のチャプマン-エンスコグ近似解は、圧縮性ナビエ-ストークス方程式を与えるものの、一般に境界条件を満足しない。境界条件を満たす解を得るために、この近似解に境界近傍（クヌーセン層）でそれを補正する補正項を付け加えた形で解を求めることを試み、補正項に対する境界値問題を導いた。この境界値問題は、非線形ボルツマン方程式に対するものであるが、層の厚み方向の変化が境界に沿う方向の変化に比べて大きいことに注意すると、適当な変数変換によって、線形化ボルツマン方程式の半空間における1次元境界値問題に帰着する。その境界条件の非同次項の形から、すべり境界条件の具体的な形が決まる。ここまでの一連の解析を、単原子分子気体および多原子分子気体に対して行った。

上記で導出した圧縮性ナビエ-ストークス方程式に対するすべり境界条件を定量的に完成させるには、そこで導いたクヌーセン層問題を数値的に解かなければならない。単原子分子気体については、既に解かれている古典的問題に帰着するため、数値計算を行うことなくすべり境界条件を具体的に構築することができた。一方、多原子分子気体については、一部が単原子分子気体の場合に帰着するものの、その他は新たに数値解析する必要があった。この数値解析を実行し、多原子分子気体に対してもすべり境界条件を具体的に構築した。

圧縮性ナビエ-ストークス方程式に、上

記 で確立した新しい非線形すべり境界条件を組み合わせた系を用いて、振動壁による非線形音波伝播の問題や定在波形成の問題、さらにはフックの法則に従う復元力が働いている平板の減衰振動の問題などの数値解析を行った。また、これらをボルツマン方程式の直接的数値解析によって得られた結果（ただし長時間計算は無理であるので、比較的短時間の計算結果）と比較することによって、圧縮性ナビエ-ストークス方程式と新しいすべり境界条件の妥当性、有用性を実証するとともに、それがどの程度のクヌーセン数まで使えるかの目安を定めた。

4. 研究成果

微細構造内での大きな温度変化や速度変化をとまなう気体流の解析には、非線形ボルツマン方程式を用いなければならない。本研究では、圧縮性ナビエ-ストークス方程式に対して、正しい非線形すべり境界条件を数学的に根拠のある形で導出し、広い条件のもとでボルツマン方程式系に取って代わる流体力学方程式系を確立した。具体的成果は以下の通りである。

(1) 空間的に1次元の問題

すべり境界条件の構築

まず、無限に広い平板（平面壁）がその面と垂直に加速・減速を伴う高速運動をする場合、すなわち、空間的に1次元の非線形問題を考えた。この場合について、非線形ボルツマン方程式とその境界条件を出発点とする系統的漸近解析を行い、圧縮性ナビエ-ストークス方程式およびそれに対するすべり境界条件を導出した。これによると、壁上の気体の速度は壁の速度に等しく法線方向の成分のみをもつが、気体の温度は壁自身の温度には一致せず、いわゆる温度の跳びが生じる。この温度の跳びは系のクヌーセン数程度の小さな量であるが、無視はできない。

通常の温度の跳びは、壁に垂直方向に温度勾配があると生じるが、壁に垂直方向に速度勾配がある場合にも同程度の温度の跳びが生じることを明らかにした。この温度の跳びは、低マッハ数または定常の問題では高次の微小量になり、実質的に現れないが、今の問題では顕著に表れる。また、これらの温度の跳びは、壁上の密度に逆比例しているため、非線形である。これは、壁での密度が小さいほど壁付近での気体分子の平均自由行程が長くなり、したがって温度の跳びが大きくなる事実を反映している。

すべりの境界条件の応用

上記 で導いた圧縮性ナビエ-ストークス方程式およびそれに対するすべり境界条件を応用して、いくつかの基礎的問題を数値的に調べた。具体的には、以下の問題を考察した。(i) 平面壁が垂直方向に正弦振動を開始する場合に、気体中を伝わる非線形音波の問題；(ii) 2平面壁間の気体において、一方の壁が垂直方向に正弦振動を開始する場合の気体の非定常運動の問題；(iii) フックの法則に従う復元力が平板に働いている場合の平板の振動とその減衰の問題。

まず問題(i)では、平板の大振幅および高速振動によって、無限遠方に向かって質量流（音響流）が生じ、このために振動壁近傍の密度が徐々に減少していくことを明らかにした。これは、オイラー方程式によってすでに得られていた結果と定性的に一致する。問題(ii)では、壁の振動によって生じる衝撃波と膨張波が反射と相互作用を繰り返す、定常振動の状態に速やかに近づいていくことを明らかにした。問題(iii)では、平板に初期変位を与えると平板は振動するが、両側の気体から受ける抵抗によって、この振動は減衰する。振幅の減衰が時間の逆べき、具体的には時間の $-3/2$ 乗に比例することを示す数値的証拠を得た。これは、クヌーセン数が有限値の場合にボルツマン方程式の直接的数値解析によって青木らが以前に得た結果と一致する。これらの数値解析では、移動格子を用いた有限体積法などの数値解析上のいくつかの工夫を行い、精度の高い計算を実行している。

(2) 一般（空間的に3次元）の問題

任意形状の境界が任意の非定常運動をする問題に対して、上記(1)の漸近解析を一般化し、圧縮性ナビエ-ストークス方程式に対する正しい非線形すべり境界条件を導出した。この境界条件では、気体の速度の境界に垂直な成分は境界速度の法線成分に等しいが、接線成分は境界速度の接線成分とは一致せず、速度のすべりが生じる。また、(1)の1次元問題と同様、温度の跳びが生じる。速度のすべりは、境界上のせん断に比例するすべり（せん断すべり）と境界に沿う温度勾配に比例するすべり（熱ほふくすべり）からなっており、基本的には古くから知られていた形に等しいが、境界上の密度に逆比例する非線形性が含まれている。温度の跳びの条件は、(1)の1次元問題の結果を3次元に拡

張したものであるが、本質的には1次元問題のものと変わらない。

以上は単原子分子理想気体に対する結果であるが、同じ解析を多原子分子気体に対しても行った。ただしここでは本来のボルツマン方程式の代わりに、ESモデルとよばれるモデルボルツマン方程式の多原子分子気体版を用いている。圧縮性ナビエ-ストークス方程式と今回構築したすべり境界条件を、他の研究者が利用しやすい形に整備した。これによって、微細構造内の気体の一般的な挙動を、いちいちボルツマン方程式に立ち返ることなく、圧縮性ナビエ-ストークス方程式を解くことで手軽に正しく求められるようになった。これは学術的に重要な結果であると同時に、実用的にも大きな意義をもつ。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

K. Aoki, R. Kagaya, S. Kosuge, and H. Yoshida, Numerical analysis of the Taylor-vortex flow of a slightly rarefied gas, in 29th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics 2014: AIP Conf. Proc. **1628**, edited by J. Fan (AIP, Melville, 2014), pp. 60-67. [査読有]

K. Aoki, M. Pulvirenti, S. Simonella, and T. Tsuji, Backward clusters, hierarchy and Wild sums for a hard sphere system in a low-density regime, *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, **25**, 995-1010 (2015). [査読有]

S. Taguchi and K. Aoki, Motion of an array of plates in a rarefied gas caused by radiometric force, *Phys. Rev. E*, **91**, 063007:1-15 (2015). [査読有]

K. Aoki, F. Golse, and S. Kosuge, The steady Boltzmann and Navier-Stokes equations, *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica (new ser.)*, **10**, 205-257 (2015). [査読有]

[学会発表](計 10 件)

K. Aoki, R. Kagaya, S. Kosuge, H. Yoshida, Numerical analysis of the Taylor-vortex flow of a slightly rarefied gas, 29th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Xi'an, China (July 13-17, 2014).

K. Aoki, Motion of an array of plates in a rarefied gas caused by radiometric force, (Invited Lecture), International Conference on Nonlinear Analysis: Boundary Phenomena for Evolutionary PDE, Institute of Mathematics, Academia Sinica,

Taipei, Taiwan (December 20-24, 2014).

K. Aoki, Motion of an array of plates in a rarefied gas caused by radiometric force, (Invited Lecture), Workshop on High Performance and Parallel Computing Methods and Algorithms for Multiphase/Complex Fluids, Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore, Singapore (March 2-6, 2015).

K. Aoki, On the steady Boltzmann and Navier-Stokes equations in the presence of an external force, (Invited Lecture), Workshop on Hyperbolic Conservation Laws and Related Topics (In honor of Tai-Ping Liu's 70th Birthday), Seoul National University, Seoul, Korea (June 22-25, 2015).

K. Aoki, Nonlinear acoustic wave propagation in a rarefied gas: Numerical analysis based on kinetic and fluid equations (Invited Lecture), International Conference on Kinetic Equations and Related Topics: In honor of Professor C. Bardos on the Occasion of His 75th Birthday, Wuhan University, Wuhan, China (September 14-18, 2015).

小菅真吾, 青木一生, 藤原大雅, 静止平板と縦振動平板間の弱希薄気体の非定常運動, 日本流体力学会年会 2015, 東京 (2015年9月26日 - 28日)。

K. Aoki, Unsteady motion of a slightly rarefied gas caused by a plate oscillating in its normal direction (Invited Lecture), International Conference on Nonlinear Analysis: Kinetic Theory and Related Topics, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan (October 30-November 3, 2015).

小菅真吾, 青木一生, 山田耕平, 希薄気体中の非線形音波伝播の数値解析, 第29回数値流体力学シンポジウム, 福岡 (2015年12月15日 - 17日)。

K. Aoki, Decay of a linear oscillator in a rarefied gas: Spatially one-dimensional case (Invited Lecture), Statistical Mechanics and Evolution Equations: A Workshop in Honor of Carlo Marchioro on Occasion of his 70th Birthday, Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo, Università di Roma "La Sapienza", Roma, Italy (January 28-29, 2016).

K. Aoki, On the slip boundary conditions for the compressible Navier-Stokes equations (Invited Lecture), Advances in Kinetic and Fluid Dynamics Transport: Analysis and Approximations, Celebrating Claude Bardos' Impact in Mathematics and Sciences, Institute for

Computational Engineering and Sciences,
University of Texas at Austin, Austin, USA
(February 22-26, 2016).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

青木一生 (AOKI, Kazuo)
京都大学・工学研究科・教授
研究者番号：10115777

(2) 研究分担者

小菅真吾 (KOSUGE, Shingo)
京都大学・工学研究科・助教
研究者番号：40335188

(3) 連携研究者 なし