様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 ２２ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2016
課題番号：２６６３０１９２

研究課題名（和文）Radon測度上の動的システムの研究と都市構造遷移モデルへの応用

研究課題名（英文）Study on Dynamical Model on Radon Measures and its Application to Urban Structure Models

研究代表者
山下　裕（Yamashita, Yuh）

北海道大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：９０２１０４２６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、無数のユニットが空間分布している状況を考え、それらの立地決定プロセスを明らかにした。ユニット群間には取引・通信・労使関係に基づく通勤等の関係があり、それらはRadon測度で表現される。本研究ではこのようなシステムを表現する新たな枠組みを構築した。その均衡条件を1つにまとめたポテンシャル汎関数が存在することを示し、そのポテンシャルをLyapunov汎関数として持つ動的モデルを提案した。それを都市構造モデルに応用し、理論的均衡状態に漸近することを数値的に確認した。

研究成果の概要（英文）：In this study, we investigate the process of unit-location determination, where spatially distributed infinitely many units exist. Some relationships among unit groups, e.g. communications, trades, and commuting, are considered, and the relationships can be expressed by Radon measures. We construct a new framework by which the relationships and locations are governed. The Nash equilibrium conditions are merged into one potential functional, which becomes a Lyapunov functional of the proposed dynamical model. The obtained results are applied to the problem of the urban structure, and we confirm that the dynamical model converges to the theoretical Nash equilibrium, by performing computer simulations.

研究分野：システム制御理論

キーワード：Radon測度　都市構造　ポテンシャルゲーム　無限次元系　KKT条件

１．研究開始当初の背景

地域経済学の 1 分野として、Ogawa-Fujita モデルなどに代表される、理論的に都市構造の静的均衡を求めそのマクロな挙動を明らかにする手法がある。しかし、その動的遷移がどのような形で行われるかは静的モデルでは明らかではなかった。過渡応答時は非均衡状態であり、非均衡状態を表現するために解空間自体を拡張して考える必要があった。

２．研究の目的

空間に分布する(spatially distributed)ユニット群からなる複数の意思決定群を含む複雑なシステムを表現する一般的なフレームワークを提供する。その均衡解の条件、制約の取り扱いを明らかにし、それらに基づいた動的モデルを提案する。都市構造モデルとして Ota-Fujita モデルを考え、それが提案フレームワークで表現できることが最低限の目標である。また、Ota-Fujita モデルの動的挙動を表現できるシミュレータを構築する。

３．研究の方法

まず、過渡状態を含んだ Ota-Fujita モデルを表現できる決定変数を考察し Radon 測度で表わす。提案動的モデルではユニットは現在の利潤が大きい立地の組に移動するとし、未来予測はしないものとする。移住モデルであるので地理的に離れた場所に一気に移動するが、時間当たりの移動ユニット数が利益差に比例するとする。Lyapunov 汎関数を構築し安定性を考察する。Lyapunov 汎関数の極小点は静的均衡解であるから、静的問題に関する意味付けも行う。またシミュレータを構築しモデルの妥当性を検証する。以上の結果を汎用的フレームワークとしてまとめる。

４．研究成果

(1) 空間分布したユニット群の表現の提案

本研究では、いくつかの種類の空間に分布した無数のユニットの動的挙動モデルを提案し、その数学的側面を明らかにした。

そこでは、個々のユニットの挙動ではなく、マクロな動きに着目している。よって、物理単位ユニットには意味がなく、無限個に分割可能なユニット群として捉え、その立地に関する分布関数を考える。便宜上、分布関数を$(-\infty,\infty)$で積分した値を”ユニット総数”と呼ぶ。以降、積分記号は$(-\infty,\infty)$の範囲を省略して記述する。本報告書では簡単のためユニットが 1 次元空間に分布する場合を説明するが、

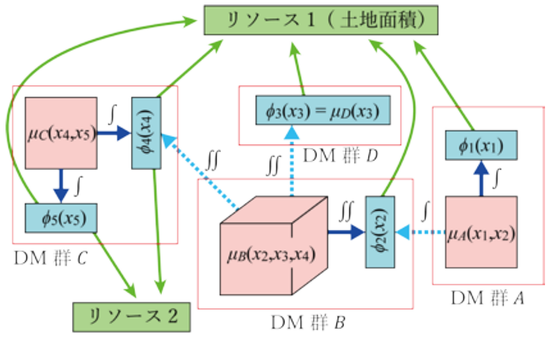

図 1: モデル概念図(例)

2-D, 3-D 空間への拡張は自明である。この均一なユニットの集合を”ユニット群”と呼び、複数のユニット群からなるモデルを考える。

各ユニットは他ユニット群の 1 ユニットと関係(通信・通勤・取引・貸し借り等)を持つ。この”関係”は密度で表すことができる。たとえば、Type1 と 2 のユニット群の関係は、密度$\mu_A(x_1,x_2)$で表され、$x=x_1$の Type1 ユニットと$x=x_2$の Type2 ユニットの関係が存在する密度を表現する。この例では、Type1 のユニット分布$\phi_1(x_1)$は$\int\mu_A(x_1,x_2)dx_2$と一致し、Type2 の分布$\phi_2(x_2)$は$\int\mu_A(x_1,x_2)dx_1$と一致する。これは 1:1 の関係を表現するので Type-1,2 のユニット総数は等しくなるが、スケーリング係数を掛ければその限りではない。ここではスケーリングは省略して説明する。3 つ以上のユニット群の関係も例えば密度$\mu_B(x_2,x_3,\dots)$で表現可能である。

Type1 ユニットと Type2 ユニットがコロケートしている場合を考える。この場合、密度は$\mu_A(x_1,x_2)=f(x_1)\delta(x_1-x_2)$の形になる(ただし$\delta(\cdot)$は Dirac δ)。よって、密度は通常の関数ではなく、Radon 測度で考えるのが適切である。密度を位置変数で微分する操作は考えていないので、一般の Schwartz 超関数まで考える必要は無い。テスト関数はコンパクトサポートを持つ非負な連続関数(滑らかさまで要求しない)である(クラスDと呼ぶ)。Radon 測度は非負(任意の非負テスト関数に対し非負)であることに注意する。

ここで考えているシステムは複数の Radon 測度を持ち、Radon 測度同士はユニット群の分布を介してつながっているものである。図 1 はその結合の例を表したものである。以降しばらくはこのモデルに対して説明するが、述べている内容はこのモデルだけではなく一般の結合に関して成り立つものである。図 1 で明らかなように、この結合は連結グラフ構造を持つ。そこでは Radon 測度とユニット群が交互に現れる。このグラフはいくつかの意思決定群(以下、Decision-Making Group; DM 群)に分割されるとする。各々の DM 群は、高々1 個の Radon 測度を持ち、最低 1 つのユニット群を含む。Radon 測度を持たない DM 群はユニット群 1 つのみで構成される。もし、複数の Radon 測度を含む広い範囲で統一した意思決定をするケースを考えたいのであれば、DM 群内の Radon 測度を融合し 1 つの高次元空間上での Radon 測度にまとめればよい。DM 群は、無数で均一な意思決定個体(DM 個体)の集まりで、DM 個体は Radon 測度上の空間の 1 点(ただし、その点をサポートの内点に持つあるテスト関数に対し正の場合)として表現される。各 DM 個体は Radon 測度で表現される関係を通じて通信・通勤等のコストを支払うか取引などの利益を得る。その金額は立地の組で表現されるものとし、競合は発生しないとする。DM 群全体としてその立地と関係を変えることで意思決定を行う。

図 1 のシステムの決定変数は Radon 測度

$\mu_k(\cdot)$ $(k=1,2,3)$ と密度関数$\mu_D(\cdot)\equiv\phi_3(\cdot)$である。DM 群 D は Radon 測度を持たないので$\phi_3(\cdot)$そのものが決定変数である。Radon 測度を含む DM 群に含まれるユニット群の分布関数は Radon 測度によって定義される。図 1 の例ではユニット群の分布は$\phi_1(x_1)\equiv\int\mu_A(x_1,x_2)dx_2$, $\phi_2(x_2)\equiv\int\int\mu_B(x_2,x_3,x_4)dx_3dx_4$, $\phi_3(x_3)\equiv\int\int\mu_B(x_2,x_3,x_4)dx_2dx_4$, $\phi_4(x_4)\equiv\int\mu_C(x_4,x_5)dx_5$, $\phi_5(x_5)\equiv\int\mu_C(x_4,x_5)dx_4$と定義される。同様な関係が DM 群の境界にも存在するが、それらはユニット群分布の定義ではなく、制約式である。図 1 のケースでは、$\xi_2(x_2)\equiv\int\mu_A(x_1,x_2)dx_1-\phi_2(x_2)=0$, $\xi_3(x_3)\equiv\int\int\mu_B(x_2,x_3,x_4)dx_2dx_4-\phi_3(x_3)=0$, $\xi_4(x_4)\equiv\int\mu_B(x_2,x_3,x_4)dx_2dx_3-\phi_4(x_4)=0$が制約式として現れる。

ユニット群の総数に関する制約も存在する。上で述べたように各ユニット群は同じ総数になるので 1 つのユニット群に関してのみ制約を考えればよい。図 1 の例では$\int\mu_D(x_3)dx_3=M$ (const.)を制約式とすればよい。さらに、Radon 測度の非負性の制約$\mu_k[\varphi]\geq 0$（$k=A,\ldots,D;\varphi\in D$）も存在する。

ユニットは占有のための土地等のリソースを必要とする場合がある。ここではリソースは空間分布しているものとし、コロケートしている各種ユニットにリソースを提供し、それぞれの立地においてリソース制約が存在するものとする。図 1 では 5 つのユニット群が 1 つの空間を共有し、土地利用制約$\nu_1(x)\equiv L_{1,1}\phi_1(x)+\cdots+L_{1,5}\phi_5(x)\leq 1$が課せられる。図 1 の場合では同様に$\nu_2(x)\equiv L_{2,1}\phi_4(x)+L_{2,2}\phi_5(x)\leq 1$なる制約も存在する。非コロケートリソースの場合はコロケートしている仮想リソース供給ユニットを考えればよい。

Radon 測度で定義された結合によって DM ユニットは利潤を得る場合があり、立地の組に応じた通信・移動コストが差し引かれる。例えば図 1 の DM 群A内の(x_1,x_2)の立地ペアを持つ DM ユニットが Radon 測度μ_Aを通して得られる利潤を$T_A(x_1,x_2)$（単位ユニットあたり）と書くことにする。DM 群全体で積分すると$\mu_A[T_A]$となる。ユニット群が内部相互作用により利潤を得る場合も考慮され、例えばx_1に立地するユニット群 1 のユニットの当該利潤は$p_1(x_1;\phi_1(\cdot))\equiv\int A_1(x_1,z)\phi_1(z)dz$ の形で表される。ユニット群全体で積分すれば$\int\int A_1(x_1,z)\phi_1(x_1)\phi_1(z)dzdx_1$となる。また、立地$x$のリソース$k$に支払う単位当たり地代を$R_k(x)$とおく。立地の利便性によって金額は変化し、リソース制約式が厳密な不等号の意味で満たすならその立地のリソースには余裕があり支払いは最低限の金額であるが、制約式の等号が成り立つならば支払い額は上昇する。ある立地の$R_k(x)$が安価であるならば、それはその立地にユニットを集める誘因となる。金額による誘引メカニズムは DM 群間の制約式にも働く。例えば図 1 で DM 群Bのユニット群 2 の立地xのユニットは DM 群Aの DM ユニットからの結合関係を集めるために金額$W_{2A}(x)$を支払う。DM 群Aの Radon 測度が通勤関係であればそれは賃金であり制約式は労働力バランスを意味する。あるいは取引ならばそれは販売単価(あるいはその値引き額: 取引の方向によって変わる)で制約式は需給バランスを意味する。

各 DM ユニットの最終利潤は図 1 の場合、

$$P_A(x_1,x_2)=\int A_1(x_1,z)\phi_1(z)dz+T_A(x_1,x_2)+L_{11}R_1(x_1)+W_{2A}(x_2)$$
$$P_B(x_2,x_3,x_4)=\int A_2(x_2,z)\phi_2(z)dz-W_{2A}(x_2)+W_{3B}(x_3)+W_{4B}(x_4)-L_{12}R_1(x_2)$$
$$P_C(x_4,x_5)=\int A_4(x_4,z)\phi_4(z)dz+T_C(x_4,x_5)+\int A_5(x_5,z)\phi_5(z)dz-L_{14}R_1(x_4)-L_{15}R_1(x_5)-L_{24}R_2(x_4)-L_{25}R_2(x_5)-W_{4B}(x_4)$$
$$P_D(x_3)=\int A_3(x_3,z)\phi_3(z)dz-L_{13}R_1(x_3)-W_{3B}(x_3)$$

となる。通常、通勤・通信・物流コストは距離に依存するので、均衡解に集積効果が表れる。

(2) ポテンシャルゲームと均衡解

本研究課題では、上記のように定式化したシステムの Nash 均衡解に対応するポテンシャルの存在を示した。連立した均衡式から均衡解を直接求めるのではなく 1 つのポテンシャルの極大点だけを求めれば良いことが利点である。例えば図 1 の場合では、

$$J\equiv\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}\int A_i(x_i,z)\phi_i(z)dz+\sum_{k=A,..C}\mu_k[T_k]$$

を制約の下で最大化する問題と等価になる。Jは DM 群とリソース所有者の総利得とは異なり係数 1/2 が付加されている。制約に関する Lagrange 乗数を付加し、拡張ポテンシャル

$$J_e\equiv J+\langle\widetilde{W}_{2A},\xi_2\rangle+\langle\widetilde{W}_{3B},\xi_3\rangle+\langle\widetilde{W}_{4B},\xi_4\rangle+S\left(\int\mu_D(z)dz-M\right)+\sum_{i=1,2}\langle\tilde{R}_i,1-\nu_i-\chi_i^2\rangle+\sum_{k=A,\ldots,D}\sum_{\varphi\in D}\lambda_k(\varphi)\{\mu_k[\varphi]-\eta_k(\varphi)^2\}$$

を考える。非加算無限個のテスト関数を使っているのでこれは概念的な式である。説明は割愛するが厳密な表現は加算個の重み付基底をとることで得られる。J_eの Fréchet 微分を考え、Karush-Kuhn-Tucker 条件を考慮すると、

$$\tilde{P}_k(\mathbf{x})=\begin{cases}\leq 0 & (\mu_k(\mathbf{x})=0\ \text{(ess.)})\\ =0 & \text{(other)}\end{cases}$$
$$\tilde{R}_i(x)\geq 0,\quad \tilde{R}_i(x)\big(1-\nu_i(x)\big)=0$$

を得る。ただし、$\tilde{P}_k(\mathbf{x})=P_k(\mathbf{x})+P_{k\mathrm{ofs}}$(そこにユニットが存在する場合), $\tilde{R}_i(x)=R_i(x)+R_{i\mathrm{ofs}}$である。Lagrange 乗数の残りも$\widetilde{W}_{ik}(x)=W_{ik}(x)+W_{ik\mathrm{ofs}}$のような関係がある。$R_{i\mathrm{ofs}}$と$W_{ik\mathrm{ofs}}$は自由パラメータであるが$\mu_k(\mathbf{x})$の均衡解には影響しない。$P_{k\mathrm{ofs}}$と$S$は$R_{i\mathrm{ofs}}$, $W_{ik\mathrm{ofs}}$より求まる。微分操作により$1/2$の係数が$(x^2/2)'=x$と同じ機構で除かれている。Lagrange 乗数は制約内の最適点を拡張ポテンシャルの極値にするための追加の傾きと解釈でき、ポテンシャルゲームでは傾きがそのユニットの利益になるので、Lagrange 乗数は追加の利益(or 支払い)を意味することに注意する。

有限土地リソースなどのいくつかの適切な

仮定の下で、weak-*位相での、解空間のコンパクト性とポテンシャルの連続性が言えるので、必ず最大値は存在する。

(3) 動的システムモデルの提案

本研究課題では、上記の構造を持つ系の動的挙動を説明する動的モデルを提案した。各 DM ユニットは利益が大きい立地の組に移動する。評価する利益は近視眼的な現在の利益であり、未来予測は入らないものとする。移住モデルであるので地理的に離れた場所に一気に移動するが、時間当たりの移動するユニット数が利益差に比例するものとする。

Radon 測度の時間微分は実数値 Radon 測度であり、weak-*収束の意味での極限で定義されている。よって時間方向の積分は通常のリーマン積分である。提案する動的モデルは

$$(d/dt)\mu_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \begin{pmatrix} \mu_k(\mathbf{x}) = 0\ \ (\text{ess.}) \\ \text{and}\ \ \tilde{P}(\mathbf{x}) < 0 \end{pmatrix} \\ (a_k + b_k\mu_k(\mathbf{x}))\tilde{P}(\mathbf{x}) & (\text{other}) \end{cases}$$

である。$\tilde{P}(\mathbf{x})$は有界なので、$b_k = 0$とするとDirac δを減少させることができなくなってしまう。一方、$a_k = 0$とするとリプリケータダイナミクスになるが、一旦ゼロになった$\mu_k(\mathbf{x})$を増加させることができない。よって上記の修正リプリケータダイナミクスモデルが適切である。このような考察は Radon 測度の見方より得られたもので、土地を細分化した有限次元モデルでは得難いものである。提案モデルでは Lagrange 乗数は制約式を時間微分した式と制約式を連立させて決定される。

Lyapunov 汎関数 $J_{\max} - J$により Lyapunov 安定性も保証される。システムが不連続であるので、漸近安定性の厳密な証明は現在のところ得られていないが、多くのシミュレーション結果が漸近安定性を示唆している。

(4) 都市構造モデルへの適用

本研究の手法は都市構造モデルの 1 つである Ota-Fujita モデルに適用できる。Ota-Fujita モデルは有名な Ogawa-Fujita モデルを特別な場合として含む。そこでは、企業をフロントユニットとバックユニットの組として扱いその通信関係を表現する Radon 測度とフロント・バックユニット群が 1 つの DM 群となる。フロントユニットに通勤する家計のユニット群と通勤関係を表現する Radon 測度が 1 つの DM 群で、バックユニット側も同様な家計が 1 つの DM 群を構成する。各 Radon 測度には距離に応じた通信・通勤コストがかかり、フロントユニット群の内部相互作用で企業が利益を得る。リソース制約としては上で述べたような土地利用制約を考える。すると、Ota-Fujita モデルは本研究課題のフレームワークで表現できることがわかる。本研究で明らかにしたように、これらの Ota-Fujita モデルの変種においても緩い制約の下で必ず Nash 均衡解が存在することを示すことができた。

本研究では、この都市構造動的モデルのシミュレータを構築した。理論で導かれた静的均衡に収束することが確認できた。また、様々

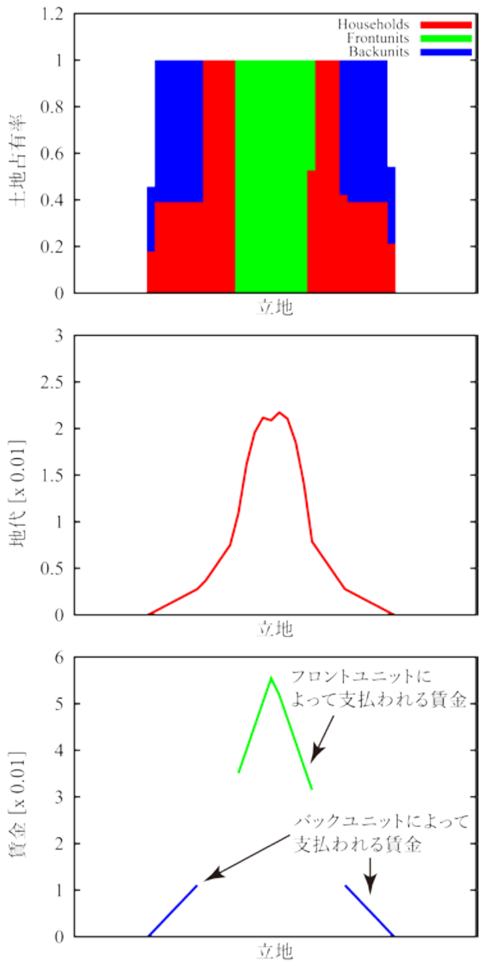

図２ シミュレーション結果の例

なバリエーションに対しても興味深い挙動を示すことがわかった。例えば、都市のすぐ外にある空き地の存在が都市構造に重要であり、ウォーターフロント都市は特別な考慮が必要であることが判明した。

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① 姜, 太田, 牛島: 大気環境が地下に与える影響―東京都特別区の地価データを用いた検証―,応用地域学研究, (無)20 (2016)

② Nokaka, Yamashita, Tsubakino: Multiple obstacle avoidance of four-wheeled vehicle with steering limitation using non-differentialble control Lyapunov function, Advanced Robotics 30, 15-28 (有) (2016) DOI: 10.1080/01691864.2015.1090333

〔学会発表〕（計 4 件）

① Ota: A dynamical extension of the urban spatial equilibrium model, Regional Science Association International (2014, ワシントン DC, USA)

② Nokaka, Yamashita, Tsubakino: General scheme of design of higer-order sliding mode controller, American Control Conference (2015, シカゴ, USA)

③ Yamashita: Continuous-time delayed feedback control for chaotic systems using complex number observer, 4th IFAC Chaos

(2015, 東京)
④ Nokaka, Yamashita, Tsubakino: Higher-order sliding-mode control for binary input by using implicit Lyapunov function, 1st IFAC MICNON (2015, サンクトペテルブルク, ロシア)

６．研究組織

(1)研究代表者

山下　裕（YAMASHITA, Yuh）
北海道大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：90210426

(2)研究分担者

太田　充（OTA, Mitsuru）
筑波大学・システム情報系・准教授
研究者番号：10176901