様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１２６０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2014～2017
課題番号：２６６３０１９４

研究課題名（和文）非線形最適制御問題に対する決定的な大域的最適化法の開発

研究課題名（英文）Deterministic Global Optimization for Nonlinear Optimal Control Problems

研究代表者
土屋　武司（Tsuchiya, Takeshi）

東京大学・大学院工学系研究科（工学部）・教授

研究者番号：５０３５８４６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：非線形最適制御問題を含む非線形最適化問題の大域的最適解は，確率的アルゴリズムなどでその候補を求めるしかないとされているが，ほぼすべての非線形最適制御問題には，問題の特性から大域的最適解を求める決定的アルゴリズムが存在するというアイディアに基づいて研究を開始した．
非線形最適制御問題は，有理多項式で表現される最適制御問題に変換される．そうした状態方程式，不等式・等式拘束条件，初期条件，終端条件，評価関数が状態変数と制御変数の多項式で表される多項式最適制御問題を，半正定値緩和によって緩和問題に変換して解く大域的最適化法の研究を行った．

研究成果の概要（英文）：A new deterministic global optimization method for solving nonlinear optimal control problems in which the constraint conditions of differential equations and the performance index are expressed as nonliear functions is proposed . The nonlinear optimal control problem is transformed into a relaxed optimal control problem with linear constraint conditions of differential equations, a linear performance index, and a matrix inequality condition with semidefinite programming relaxation.

研究分野：航空宇宙工学

キーワード：最適制御　大域的最適化

１．研究開始当初の背景
　制御理論と数理計画法において，以下の２つの研究背景があった．
(1) 非線形システムから有理式または多項式表現システムへのはめ込み．
(2) 多項式最適化問題に対する決定的な大域的最適化法の開発
これらを組み合わせることで，最適制御問題の大域的最適解を決定論的に求めることができるのではないかと考えたのが，本研究の背景である．

２．研究の目的
　非線形最適制御問題を含む非線形最適化問題の大域的最適解は，確率的アルゴリズムなどでその候補を求めるしかないとされているが，ほぼすべての非線形最適制御問題には，問題の特性から大域的最適解を求める，新たな決定的アルゴリズムに関する研究を実施する．非線形最適制御問題は，その大域的最適解を決定的に解くことができる簡便な最適制御問題，すなわち有理多項式で表現される最適制御問題に変換されることを利用する．本研究が達成されれば，最適制御の理論と解法，さらにその応用分野に大きな影響を与える．ゆえに，本研究の目的は，可能な限り大きな規模の非線形最適制御問題の大域的最適解を求めることができる決定的な大域的最適化法を確立させることである．

３．研究の方法
　前項の研究の目的を達成するため，最適制御問題解法に対する理論的研究を行い，具体的な例題による実証を行った．

４．研究成果
(1)　最適制御問題の定義
　時間 $t\in[0,T]$ の関数である状態変数 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$，制御変数 $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbb{R}^m$ に対して，

$$\begin{aligned}&\underset{\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)}{\text{Minimize}} && J=\int_0^T f_0(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))dt\\ &\text{subject to} && \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\\ &&& \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{aligned}$$

という終端時間固定の最適制御問題を定義する．ここで，$\boldsymbol{f}=[f_1,\ldots,f_n]^{\mathrm{T}}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ とする．
制約条件を満たす $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$ の集合，すなわち許容（admissible）変数の集合を $\boldsymbol{K}$ とする．

$$\boldsymbol{K}:=\left\{(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\mid\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t)),\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\right\}$$

すると，上の最適制御問題は

$$\min_{(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\in\boldsymbol{K}} J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

と表される．

(2)　最適制御問題の双対問題
　数理計画問題では一般的な双対問題を最適制御問題で考えることで，目的の手法を導入できると考えた．
　まず，拡張評価関数（augmented performance index）J' を定義する．

$$\begin{aligned}J'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})&=\int_0^T\left\{f_0+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{f}-\dot{\boldsymbol{x}}\right)\right\}dt\\ &=\boldsymbol{\lambda}(0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{\lambda}(T)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(T)\\ &\qquad+\int_0^T\left(f_0+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}+\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right)dt\end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{\lambda}(t)\in\mathbb{R}^n$ は随伴変数と呼ばれる．
ここから，

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}(t)}\ \min_{(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\in\mathbb{R}^{n+m}} J'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})=\min_{(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\in K} J(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

が成り立つ．この式の左辺が最適制御問題の双対問題であり，その求解は式の右辺で表される元の最適制御問題の求解に等しい．
　この双対問題を最適制御問題の形で表すと，以下のようになる．
　任意の $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$ に対して，

$$\begin{aligned}&\underset{\boldsymbol{\lambda}(t)}{\text{Minimize}} && -\boldsymbol{\lambda}(0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_0-\int_0^T\zeta dt\\ &\text{subject to} && f_0+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}+\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\zeta\geq 0\\ &&& \boldsymbol{\lambda}(T)=\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

(3)　多項式最適制御問題の定義
先の最適制御問題の関数 f_i（$i=0,1,\ldots,n$）が変数 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{u}$ の多項式で表されているとき，その最適制御問題を多項式最適制御問題と呼んだ．多項式を次のように表す．

$$f_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$$

ここで，$\boldsymbol{\alpha}:=\left[\alpha_i\right]\in\mathbb{N}_0^n$，$\boldsymbol{\beta}:=\left[\beta_i\right]\in\mathbb{N}_0^m$，サポート集合を $\boldsymbol{\Phi}$，$\boldsymbol{v}:=\left[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}_j}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\beta}_j}\right]\in\mathbb{R}^{|\boldsymbol{\Phi}|}$（$(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta}_j)\in\boldsymbol{\Phi}$），$\boldsymbol{f}_i$ は $\boldsymbol{v}$ に対応する係数をまとめた係数ベクトルとした．

(4)　随伴変数の多項式近似
　随伴変数 $\boldsymbol{\lambda}(t)=[\lambda_i(t)]\in\mathbb{R}^n$ を多項式で以下のように近似する．

$$\lambda_i(t)=\boldsymbol{c}_i(t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}(t)$$

なお，サポート集合を $\boldsymbol{\Lambda}$ とし，$\boldsymbol{w}:=[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}_j}]\in\mathbb{R}^{|\boldsymbol{\Lambda}|}$（$(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\beta}_j)\in\boldsymbol{\Lambda}$）である．
　すると，多項式最適制御問題の双対問題は，任意の $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$ に対して，

$$\begin{aligned}&\underset{\boldsymbol{c}_i(t)\ (i=1,\ldots,n)}{\text{Minimize}} && -\sum_{i=1}^n\left(\boldsymbol{w}_0x_{i0}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_i(0)-\int_0^T\zeta dt\\ &\text{subject to} && \boldsymbol{f}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^n\boldsymbol{f}_i\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{w}+\left(\sum_{i=1}^n x_i\dot{\boldsymbol{c}}_i\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\\ &&&\quad+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\boldsymbol{f}_j\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_j\right)\boldsymbol{w}-\zeta\geq 0\\ &&& \boldsymbol{c}_i(T)=\boldsymbol{0}\qquad(i=1,\ldots,n)\end{aligned}$$

と表される．これを多項式近似双対問題と呼

んだ．

(5)　多項式近似双対問題の２乗和多項式近似

多項式近似双対問題の制約条件は，任意の $\boldsymbol{x}(t)$ ， $\boldsymbol{u}(t)$ に対して左辺が非負多項式となることを要求している．非負多項式は２乗和多項式で表すことができる．

$$\boldsymbol{f}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{w}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\dot{\boldsymbol{c}}_i\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} \\ +\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\boldsymbol{f}_j\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_j\right)\boldsymbol{w}-\zeta=\boldsymbol{v}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{v}'$$

ただし， $\boldsymbol{V}\succeq 0$ である．この両辺の各次の係数が等しいという条件式から，多項式近似双対問題は次のような最適制御問題になる．

$$\underset{\substack{\boldsymbol{c}_i(t)\ (i=1,\dots,n),\\ \boldsymbol{V}(t)}}{\text{Minimize}}\quad -\sum_{i=1}^{n}\left(x_{i0}\boldsymbol{w}_0\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_i(0) \\ -\int_0^T\left\{\boldsymbol{f}_{00}+\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{0}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_i\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{0}}\bullet\boldsymbol{V}\right\}dt$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{c}}_i \\ +\sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_i+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{D}_j\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_j\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}_i \\ +\boldsymbol{f}_{0\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}\bullet\boldsymbol{V} \\ (\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\Omega}^*) \\ \boldsymbol{c}_i(T)=\boldsymbol{0}\qquad(i=1,\dots,n) \\ \boldsymbol{V}\succeq 0$$

この最適制御問題は評価関数と状態方程式が線形であるが， $\boldsymbol{V}$ が半正定値対称行列となる非線形の制約条件を含んでいる．これを２乗和多項式近似双対問題と呼ぶことにする．

(6)　緩和最適制御問題

もう一度，２乗和多項式近似双対問題の双対問題を求める．すると，以下が得られる．

$$\underset{y_{\boldsymbol{k}}(t)(\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\Omega})}{\text{Minimize}}\quad \int_0^T\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{f}_{0\boldsymbol{k}}y_{\boldsymbol{k}}dt$$

$$\text{subject to}\quad \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\Omega}^*}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}\dot{y}_{\boldsymbol{k}} \\ =\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\Omega}}\left(\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_i+\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{D}_j\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_j\right)y_{\boldsymbol{k}} \\ y_{\boldsymbol{0}}=1 \\ \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\Omega}^*}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}_i}y_{\boldsymbol{k}}(0)=x_{i0}(0)\boldsymbol{v}_{x0}(0) \\ (i=1,\dots,n) \\ \sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\Omega}}y_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}\succeq 0$$

上の問題は多項式最適制御問題の双対問題の双対問題であるから元の最適制御問題である．しかし，随伴変数の多項式近似によって，上の問題は元の多項式最適制御問題の近似問題になっている．緩和最適制御問題と呼んだ．

(7)　緩和問題の最適解の大域性の証明

緩和最適制御問題は唯一の最適解を持つことが証明できた．すなわち，最適解を求めればそれが大域的最適解である．なぜなら，緩和最適制御問題の評価関数と状態方程式は線形である．そのため，最適制御の理論において最適制御量を決めるハミルトニアンを緩和問題について求めてみると，制御変数に関して線形になっている．よって，ポントリャーギンの最大値原理より，不等式制約条件の境界で制御量は最適になる．行列 $\sum_{\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{\Omega}}y_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}}$ が半正定値対称行列となる不等式制約条件を満たす $y_{\boldsymbol{k}}$ の領域は閉凸錐である．以上より，制御量の極小値はただ一つであり，その最小値が大域的最適解である．

ゆえに，随伴変数を近似する多項式の次数，すなわちサポート集合 $\boldsymbol{\Lambda}$ に含まれる次数を上げていきながら緩和問題の最適解を求めていくと，元の多項式最適制御問題の大域的最適解を求めることができることが判明した．

(8)　有効性を検証する例題

次に，本論文で提案する多項式最適制御問題の大域的最適化法を例題に適用して，有効性の検証を行った．一例を示す．

状態変数 $x(t)\in\mathbb{R}$ ，制御変数 $u(t)\in\mathbb{R}$ によって定義される以下の最適制御問題を考える．

$$\underset{x(t),u(t)}{\text{Minimize}}\ J:=\int_0^5\left(x^4-6x^3+8x^2+u^2\right)dt$$

$$\text{subject to}\ \dot{x}=u\,,\quad x(0)=0.5$$

従来の代表的な数値解法である勾配法によって最適解を求めると，評価関数値が 0.62 と −34.39 になる局所的最適解が求められる．２つの局所的最適解のうち，大域的最適解は評価関数値が −34.39 の最適解である．勾配法を用いて大域的最適解を求める場合，大域的最適解に近い初期解を選び最適化計算を始めなければならないのが従来手法の欠点であった．

本研究の手法を適用する．

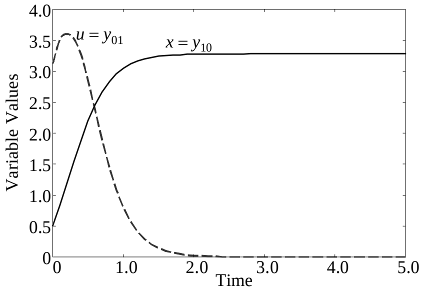
随伴関数を状態変数 x の２次多項式（ $\boldsymbol{\Lambda}=\{0,1,2\}$ ）で近似する．緩和最適制御問題は以下のようになる．

$$\underset{\boldsymbol{y}(t)}{\text{Minimize}}\ J_{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Lambda})}=\int_0^5\left(y_{40}-6y_{30}+8y_{20}+y_{02}\right)dt$$

$$\text{subject to}\ \dot{y}_{10}=y_{01}\,,\quad y_{10}(0)=0.5 \\ \dot{y}_{20}=2y_{11}\,,\quad y_{20}(0)=0.25 \\ \dot{y}_{30}=3y_{21}\,,\quad y_{30}(0)=0.125 \\ y_{00}=1$$

$$\begin{bmatrix} y_{00} & y_{10} & y_{20} & y_{01} \\ y_{10} & y_{20} & y_{30} & y_{11} \\ y_{20} & y_{30} & y_{40} & y_{21} \\ y_{01} & y_{11} & y_{21} & y_{02} \end{bmatrix} \succeq 0$$

ここで，$\boldsymbol{\Omega} = \{00, 10, 01, 20, 11, 02, 30, 21, 40\}$ である．この問題の最適解を以下の図に示す．評価関数値は-34.39である．ほぼ大域的最適解と等しくなった．

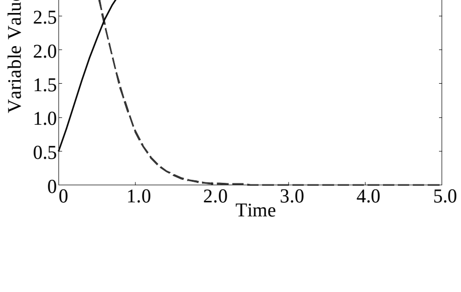


次に，随伴関数を状態変数xの 3 次多項式（$\boldsymbol{\Lambda} = \{0, 1, 2, 3\}$）とすると，緩和最適制御問題は以下のようになる．

$$\underset{\boldsymbol{y}(t)}{\text{Minimize}}\ J_{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Lambda})} = \int_0^5 \left(y_{40} - 6y_{30} + 8y_{20} + y_{02}\right) dt$$

$$\begin{aligned} \text{subject to }\ & \dot{y}_{10} = y_{01},\quad y_{10}(0) = 0.5 \\ & \dot{y}_{20} = 2y_{11},\quad y_{20}(0) = 0.25 \\ & \dot{y}_{30} = 3y_{21},\quad y_{30}(0) = 0.125 \\ & \dot{y}_{40} = 4y_{31},\quad y_{40}(0) = 0.0625 \\ & y_{00} = 1 \\ & \begin{bmatrix} y_{00} & y_{10} & y_{20} & y_{01} & y_{11} \\ y_{10} & y_{20} & y_{30} & y_{11} & y_{21} \\ y_{20} & y_{30} & y_{40} & y_{21} & y_{31} \\ y_{01} & y_{11} & y_{21} & y_{02} & y_{12} \\ y_{11} & y_{21} & y_{31} & y_{12} & y_{22} \end{bmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\Omega} = \{00, 10, 01, 20, 11, 02, 30, 21, 12, 40, 31, 22\}$ である．この問題の最適解を以下の図に示す．評価関数値は-34.39である．最適解は先の随伴関数２次多項式近似の緩和最適制御問題の最適解とほとんど変わらず，この最適解が元の最適制御問題の大域的最適解の良い近似であることがわかる．



すなわち，この解は元の最適制御問題の大域的最適解であり，局所的最適解を排して，決定論的に大域的最適解を求めることができるようになった．

(9) まとめと今後の発展性

本研究は主に，状態方程式と評価関数が状態変数と制御変数の多項式で表される非線形最適制御問題（多項式最適制御問題）の大域的最適解を，半正定値計画緩和によって解く新たな大域的最適化法を提案し，確立させることに注力してきた．多項式最適制御問題の双対問題への変換，随伴関数の多項式近似，非負多項式の２乗和多項式表現，双対問題への再変換を通して，緩和問題（緩和最適制御問題）が得られた．この緩和最適制御問題は元の多項式最適制御問題に自明な制約条件を加え，半正定値計画緩和して得られた問題でもある．唯一の大域的最適解を持ち，緩和度に応じて元の最適制御問題の大域的最適解の近似解が得られる．近似解として，制御量と状態量の時間推移，評価関数値がともに求められるのが特徴である．また，緩和最適制御問題の双対問題を考慮した数値解法を用いれば，最適制御問題の初期条件を状態量空間に渡って変化させた場合の最適な評価関数値の変化も得ることができる．

今後は，大規模な多項式最適制御問題の数値解法を可能にする手法を開発する必要がある．また，初期条件が変化した場合の最適な評価関数値が得られることは実際のシステムの最適制御に有益であり，初期条件の変動に対する最適制御則を導き出すことができる．

なお，本研究成果は，現在，雑誌論文へ投稿中であり，学会発表も控えている．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　０件）

〔学会発表〕（計　０件）

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０件）

○取得状況（計　０件）

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者

土屋　武司（TSUCHIYA, Takeshi）
東京大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号：50358462