

平成 30 年 6 月 9 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(A)

研究期間：2014～2017

課題番号：26707001

研究課題名(和文)p進群の法p表現の解明

研究課題名(英文)Study of mod p representations of p-adic groups

研究代表者

阿部 紀行(Abe, Noriyuki)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：00553629

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 9,100,000円

研究成果の概要(和文)：Langlands予想は、Fermat予想のような問題をその内部に含む一連の予想であり、p進群の表現論はその一部をなしている。本研究では主にp進群の法p表現論を調べた。既約表現の分類に関する定理を共同研究で得た他、その既約表現のいくつかの関手による像などの決定を行った。また、既約表現の分類定理を示す際に重要な役割を果たしたプロp岩堀Hecke環の表現論も調べ、既約表現の分類、拡大の計算および法p表現との関係などを調べた。

研究成果の概要(英文)：Langlands conjecture is a conjecture which includes, for example, Fermat's conjecture. Representation theory of p-adic groups is a part of this conjecture. I studied modulo p representations of p-adic groups. I proved a classification theorem of such representations (with collaborators) and the images of certain functors of these representations are calculated. I also studied pro-p-Iwahori Hecke algebra which plays an important role in the proof of the classification theorem. I classified simple modules, calculated extensions between simple modules and studied the relations between modulo p representations.

研究分野：表現論

キーワード：既約表現 p進群 法p表現

### 1. 研究開始当初の背景

Langlands 予想は Fermat 予想などをその帰結とする大予想である。その定式化には、 $p$  進群の表現論が自然に現れる。このような考えに触発されて、 $p$  進群の、標数  $p$  の体の上の表現である法  $p$  表現論が研究されてきた。

最初にこのような研究を行ったのは Barthel-Livné である。GL<sub>2</sub> の場合に超特異表現の概念が定義され、既約表現の分類が超特異表現のそれに帰着された。 $p$  進数体上の GL<sub>2</sub> の既約超特異表現は Breuil によりその後分類され、これらの成果をもとに法  $p$  Langlands 対応および  $p$  進 Langlands 対応が確立した。

一般の  $p$  進群に関しては、Herzig が Barthel-Livné の結果を GL<sub>n</sub> へと拡張した。さらにいくつかの研究が存在したが、最終的に私と G. Henniart, F. Herzig および M.-F. Vignéras との共同研究によって、一般の  $p$  進群に対して拡張された。これにより既約表現の分類は超特異表現のそれに完全に帰着された。この分類定理は、一般の既約表現は超特異表現からの放物型誘導表現の部分商としてかける、という形で記述される。

### 2. 研究の目的

$p$  進群の法  $p$  表現論を調べる。特に、分類定理に基づいて既約表現の構造を深く理解する。

### 3. 研究の方法

古典的な  $p$  進群の表現論 (標数 0 の体の上における表現論) において重要なツールの一つが Hecke 環である。一般に  $p$  進群とそのコンパクト開部分群が与えられると、その対に付随して Hecke 環と呼ばれる環が定まる。 $p$  進群の表現に対して Hecke 環の表現を与える関手が存在し、特に古典的な場合にはもとの表現の構造を深く反映することが示される。例えば、既約表現の分類はその一部が Hecke 環上の単純加群の分類に帰着される。

法  $p$  表現の場合には、プロ  $p$  岩堀 Hecke 環と呼ばれるコンパクト開部分群を考えるのが自然である。対応する Hecke 環はプロ  $p$  岩堀 Hecke 環と呼ばれる。古典的な場合と同様の Hecke 環による  $p$  進群の表現論の支配は一般には成立しないが、プロ  $p$  岩堀 Hecke 環に対しては、かなりの部分が支配されるであろうことが、これまでの研究から観測されてきた。そこで本研究では、プロ  $p$  岩堀 Hecke 環の表現論を調べ、それを  $p$  進群の法  $p$  表現に反映させる形での研究を行う。

### 4. 研究成果

まずはプロ  $p$  岩堀 Hecke 環の既約表現の分類を行った。結果として、定理の形は既約法  $p$  表現の分類と非常に似たものとなる。なお、この場合は、超特異表現は Ollivier お

よび Vignéras による分類があり、従って既約表現は完全に分類されたことになる。この既約表現の分類と既に得られていた分類定理はその証明も込めて独立であったが、まずその証明に深い関係があること、より詳しくは、プロ  $p$  岩堀 Hecke 環に対する分類定理の証明の一部を使うことで、法  $p$  表現の分類定理で重要な役割を果たした「ウェイトの変換定理」を示すことができるということが明らかになった。また、両者の分類の間の直接的な関係を Henniart および Vignéras との共同研究で明らかにした。

プロ  $p$  岩堀 Hecke 環の表現をさらに理解するために、表現の間の拡大の計算を行った。一般の (長さが有限な) 表現は既約表現の積み重ねにより得られるが、この積み重ねとしてどのようなものが許されるか、というのが「拡大」の概念である。計算結果は既約表現の分類に即する形で行われる。

既約法  $p$  表現の性質に関する研究を Henniart および Vignéras とともに行った。特に、放物型誘導の随伴関手による像の計算を行い、既約表現の像が既約または 0 となることを示した。また、スムーズ双対のような基本的な関手による振る舞いも調べた。同様の研究をプロ  $p$  岩堀 Hecke 環の表現に対しても行った。これは上記の拡大の計算に必要な研究でもあった。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

- [1] Noriyuki Abe, Change of weight theorem for pro- $p$ -Iwahori Hecke algebras, Around Langlands correspondences, Contemp. Math., vol. 691, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, pp. 1-13, 査読あり.
- [2] Noriyuki Abe, G. Henniart, F. Herzig and M.-F. Vignéras A classification of irreducible admissible mod  $p$  representations of  $p$ -adic reductive groups, J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), 495-559, 査読あり.
- [3] Noriyuki Abe and M. Kaneda, Loewy structure of  $G_1T$ -Verma modules of singular highest weights, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. Volume 16, Issue 4, 2017, pp. 887-898, 査読あり.
- [4] Noriyuki Abe, First extension groups of Verma modules and  $R$ -polynomials, J. Lie Theory 25 (2015), no. 2, 377-393,

査読あり.

[5] Noriyuki Abe and Y. Mieda, Jacquet functor and De Concini-Procesi compactification, International Mathematics Research Notices, 12 (2015), 3810–3829, 査読あり.

[6] Noriyuki Abe and M. Kaneda, Loewy series of parabolically induced  $G_1T$ -Verma modules, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. 14 (2015), no. 01, 185–220, 査読あり.

[学会発表](計 21 件)

[1] Noriyuki Abe, A classification theorem of irreducible admissible mod  $p$  representations and its consequences, Arithmetic Geometry and Related Topics, 愛媛大学, 2017 年 11 月 21 日.

[2] 阿部 紀行,  $q = 0$  におけるプロ  $p$  岩堀 Hecke 環の既約表現の間の拡大について, 代数セミナー, 広島大学, 2017 年 10 月 6 日.

[3] 阿部 紀行,  $p$  進簡約群の既約法  $p$  表現の分類定理とその応用, 代数学シンポジウム, 2017 年 9 月 7 日.

[4] 阿部 紀行, 法  $p$  佐武変換の明示公式, 東北大学代数セミナー, 東北大学, 2017 年 5 月 11 日.

[5] 阿部 紀行,  $p$  進簡約群の法  $p$  表現論, 日本数学会北海道支部講演会, 北海道大学, 2016 年 11 月 30 日.

[6] 阿部 紀行, Affine Hecke algebra at  $q = 0$  and mod  $p$  Satake transform, 城西大学ワークショップ「表現論と微分方程式」, 城西大学, 2016 年 11 月 26 日.

[7] Noriyuki Abe, On mod  $p$  Satake transforms, Workshop on Shimura varieties, representation theory and related topics, 京都大学, 2016 年 11 月 21 日.

[8] Noriyuki Abe, On the structure of modulo  $p$  compact induction of  $p$ -adic groups, The  $p$ -adic Langlands Program and Related Topics, インディアナ大学, 2016 年 5 月 17 日.

[9] Noriyuki Abe, Some applications of the classification theorem of irreducible admissible mod  $p$  representations, Algebraisation and

Geometrisation in the Langlands Programme, ブリストル大学, Bristol, 2016 年 3 月 30 日.

[10] Noriyuki Abe, A classification theorem of irreducible admissible modulo  $p$  representations and its applications, Seminaire Groupes Reductifs et Formes Automorphes, パリ 6 大学, Jussieu, 2015 年 12 月 14 日.

[11] Noriyuki Abe, A classification of irreducible admissible modulo  $p$  representations of reductive  $p$ -adic groups, Around Langlands correspondence, パリ 11 大学, Orsay, 2015 年 6 月 19 日.

[12] Noriyuki Abe, Loewy series of parabolically induced  $G_1$ -modules, セミナー, プレーズ・パスカル大学 (ケレルモン第 2 大学), 2015 年 6 月 12 日.

[13] Noriyuki Abe, A classification of irreducible admissible modulo  $p$  representations of reductive  $p$ -adic groups, セミナー, パリ 13 大学, 2015 年 5 月 29 日.

[14] Noriyuki Abe, Loewy series of parabolically induced  $G_1$ -modules, セミナー, Uppsala University, スウェーデン, 2015 年 3 月 17 日.

[15] Noriyuki Abe, Representations of affine Hecke algebra at  $q = 0$ , セミナー, Mittag-Leffler 研究所, スウェーデン, 2015 年 3 月 5 日.

[16] Noriyuki Abe, A classification of irreducible admissible modulo  $p$  representations of reductive  $p$ -adic groups, セミナー, ランス大学, Reims, 2015 年 2 月 4 日.

[17] Noriyuki Abe, A classification of irreducible admissible modulo  $p$  representations of reductive  $p$ -adic groups, Seminaire de geometrie algebrique, レンヌ第一大学, Rennes, 2015 年 1 月 15 日.

[18] Noriyuki Abe, A classification of irreducible modulo  $p$  modules of pro- $p$ -Iwahori Hecke algebras, Seminaire d'Arithmetique et de Geometrie Algebrique, パリ 11 大学, Orsay, 2014 年 12 月 9 日.

[19] Noriyuki Abe, A classification of

modulo  $p$  irreducible modules of pro- $p$  Iwahori Hecke algebra, Seminaire Groupes Reductifs et Formes Automorphes, パリ 6 大学, Jussieu, 2014 年 10 月 13 日.

[20] 阿部 紀行, アフィン Hecke 環の  $q = 0$  における表現論, 表現論セミナー, 北海道大学, 2014 年 8 月 26 日.

[21] Noriyuki Abe, A classification of irreducible admissible modulo  $p$  representations of reductive  $p$ -adic groups, RIMS project 2014 Geometric Representation Theory, 京都大学数理解析研究所, 2014 年 8 月 1 日.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

阿部 紀行 (ABE NORIYUKI)

北海道大学 大学院理学研究院 准教授

研究者番号 : 00553629

### (2) 研究分担者

無し

### (3) 連携研究者

無し

### (4) 研究協力者

無し