様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：３７５０３
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2015
課題番号：２６７８０１９０

研究課題名（和文）コモディティにおけるコンビニエンス・イールドと在庫に関する理論分析及び実証分析

研究課題名（英文）A theoretical and empirical analysis on convenience yield and storage for commodity price

研究代表者
中島　克志（NAKAJIMA, Katsushi）

立命館アジア太平洋大学・国際経営学部・助教

研究者番号：９０７２１５７２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,600,000円

研究成果の概要（和文）：この研究の目的は、コモディティの現物価格、先物価格、限界在庫費用とコンビニエンス・イールドの関係を導き、さらには企業の最適な生産計画・ヘッジ戦略を導出することであった。今回の研究では、大きく分けて2つの成果を挙げた。一つは複数のコモディティにおける長期的な関係があるときにどのようにコモディティ・スプレッド・オプションが評価されるべきかということについて、もう一つはコモディティ価格の重要なキー・ファクターであるコンビニエンス・イールドそのものをモデル化したことである。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this study is to derive the relationship between commodity spot price, futures price, marginal inventory cost, and the convenience yield. Furthermore, it was planned to calculate the optimal production plans and hedging strategies of a firm. In this study, we have two outcomes. One is to show how commodity spread options will be evaluated when there is a long-term relationship between number of commodity prices and convenience yields. Another is to model the convenience yield which is one of the key factor for commodity price.

研究分野：ファイナンス

キーワード：金融論　コモディティ　在庫理論　コンビニエンス・イールド　先物　オプション　ヘッジ

１．研究開始当初の背景

コモディティとは、エネルギー、農産物、金属など商品と総称される資産を指す。我が国は元来少資源国であり、特にエネルギーについては、石油ショックなどにより省エネルギーも含めてエネルギーの多様化や各エネルギーの技術革新を目指してきた。しかし、２０１１年の大震災による福島原子力発電所事故により化石エネルギーが再び主要なエネルギーとして注目を集めることになった。そのため、化石エネルギーの価格に左右される経済がしばらく続く傾向にあり、エネルギー価格の研究、及びエネルギー・リスクをヘッジするためのデリバティブの研究はますます必要になると考えられる。

また、コモディティは農産物、金属なども含んでおり、農産物であれば天候不順による価格変動のリスク・ヘッジ、金属であれば自動車や造船の在庫調整に関わる価格変動のリスクのヘッジなどについて、様々な応用がある。そして、我が国が取るべきでないリスクを深く研究することで、リスクの低下を図りつつ、取るべきリスクに資源を配分するような研究が求められる。

２．研究の目的

本研究では、コモディティの現物を扱う企業が先物を取引する場合における利益最大化モデルを前提として、複数のコモディティ価格の現物と先物に関する関係を研究する。本研究のモデルにより、在庫量によるコモディティ現物理論価格、また在庫量とコモディティ現物価格によるコモディティ先物理論価格を導出する。したがって、コモディティ価格を特徴づけるコンビニエンス・イールドの意味を捉え直し、在庫とコンビニエンス・イールドの関係が明確になることがわかる。

さらに、投機家と消費者を導入し、コモディティの現物、先物の均衡価格が各プレイヤーによりどのように影響されるのかについて分析する。

３．研究の方法

最初の研究については複数のコモディティ価格、コンビニエンス・イールドの確率過程、さらには複数のコモディティ対数価格の間に線形関係が存在することを前提に、コモディティ・スプレッド・オプションの評価を行う。前提のモデルは、Nakajima and Ohashi (2012)で提示されたものであり、その上でヨーロピアン・コモディティ・スプレッド・オプションの評価式を導出し、その振る舞いを数値解析により明らかにする。さらに、アメリカン・コモディティ・スプレッド・オプションについては、Broadie and Detemple (1997)の証明方法を踏まえながら、アメリカン・コモディティ・スプレッド・オプション評価の特徴と評価式の分解、さらにはその近似解を導く。

2 点目の研究については、企業の利益最大化問題を定義し、それを解くことにより、コモディティの現物価格、先物価格、限界在庫費用とコンビニエンス・イールドの関係を導く。なお、企業の利益最大化問題では、在庫量などに関する制約を置き、この制約に対するシャドー・プライスがコンビニエンス・イールドであると解釈できるような形になる。

さらに、最適な生産量、取引戦略を導出する。この取引戦略は企業にとってはヘッジ戦略とも読み替えられる。導出方法については、最適化の必要条件に対して逆関数が存在するような仮定を置いて、存在を示す。具体的な例も明確に示すことで応用にも利用できるような形にする。

なお、離散時間だけでなく連続時間でも証明し、経済学的なモデルを金融工学的なモデルへつながりを示す。具体的には、Gibson-Schwartz (1990)モデル、Schwartz (1997)モデルなどの既存のモデルとの対応関係を明らかにする。

４．研究成果

最初の研究では、複数のコモディティにおける長期的な関係は共和分モデルを利用し、その上で、コモディティ・スプレッド・オプションのヨーロピアンとアメリカン・オプションを評価した。このようなデリバティブは New York Mercantile Exchange などで活発な取引がされており、重要な金融商品である。これは『コモディティ市場と投資戦略』第 8 章と“Commodity Spread Option with Cointegration”(2016)として発表した。

具体的には以下のような成果が挙げられる。まず、各コモディティの対数現物価格とコンビニエンス・イールドが下記のような確率過程に従うとして、

$$d\ln S_i(t) = \left(r - \frac{\sigma_{S_i}^2}{2} - \delta_i(t) + b_i z(t)\right)dt + \sigma_{S_i} dW_{S_i}(t), \quad i = 1, 2,$$

$$d\delta_i(t) = \kappa_i(\hat{\alpha}_i - \delta_i(t))dt + \sigma_{\delta_i} dW_{\delta_i}(t), i = 1, 2,$$

さらに、コモディティの対数現物価格が線形関係を持つとすると、

$$z(t) = \mu_z + a_0 t + \sum_{i=1}^{2} a_i \ln S_i(t),$$

ヨーロピアン・コモディティ・スプレッド・オプションの評価は

$$\begin{aligned}
& C^E(G_1(t,T_1), G_2(t,T_2), t) \\
= \; & h_1 G_1(t,T_1)\exp\{-r(T_0-t)\} \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(d_1(x_2)) n(x_2 | \mu_{X_{G_2}}(t,T_0,T_2) + \sigma_{X_{G_1}X_{G_2}}(t,T_0,T_1,T_2), \sigma_{X_{G_2}}^2(t,T_0,T_2)) dx_2 \\
& - h_2 G_2(t,T_2)\exp\{-r(T_0-t)\} \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(d(x_2)) n(x_2 | \mu_{X_{G_2}}(t,T_0,T_2) + \sigma_{X_{G_2}}^2(t,T_0,T_2), \sigma_{X_{G_2}}^2(t,T_0,T_2)) dx_2 \\
& - K e^{-r(T_0-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(d(x_2)) n(x_2 | \mu_{X_{G_2}}(t,T_0,T_2), \sigma_{X_{G_2}}^2(t,T_0,T_2)) dx_2,
\end{aligned}$$

となる。そして、アメリカン・コモディティ・スプレッド・オプションの評価は

$$C^A(G_1, G_2, t) = C^E(G_1, G_2, t) + a^A(G_1, G_2, t; B)$$

となり、第 2 項は近似的に

$$\begin{aligned}
& a^{Ap}(G_1, G_2, t) \\
= \ & r\Bigg[h_1 \int_t^{T_0} \exp\left\{-r(u-t) + \mu_{X_{G_1}}(t,u,T_1) + \frac{1}{2}\sigma^2_{X_{G_1}}(t,u,T_1)\right\} \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(d_{eep2}(x_2,u)) \\
& \times n(x_2|\mu_{X_{G_2}}(t,u,T_2) + \sigma_{X_{G_1}X_{G_2}}(t,u,T_1,T_2), \sigma^2_{X_{G_2}}(t,u,T_2))dx_2du \\
& -h_2 \int_t^{T_0} \exp\left\{-r(u-t) + \mu_{X_{G_2}}(t,u,T_2) + \frac{1}{2}\sigma^2_{X_{G_2}}(t,u,T_2)\right\} \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(d_{eep1}(x_2,u)) \\
& \times n(x_2|\mu_{X_{G_2}}(t,u,T_2) + \sigma^2_{X_{G_2}}(t,u,T_2), \sigma^2_{X_{G_2}}(t,u,T_2))dx_2du \\
& -K \int_t^{T_0} e^{-r(u-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(d_{eep1}(x_2,u)) \\
& \times n(x_2|\mu_{X_{G_2}}(t,u,T_2), \sigma^2_{X_{G_2}}(t,u,T_2))dx_2du\Bigg],
\end{aligned}$$

となることが示された。

2 点目の研究では、コンビニエンス・イールドを限界在庫費用と在庫に掛かる制約のシャドー・プライスとして特徴づけた。これまではコンビニエンス・イールドの確率過程を外生的に仮定した上で、市場データを用いて推定するしかなかったが、これによりコンビニエンス・イールドを内生的な変数として扱えるようになった。また、コモディティを利用し生産する企業の最適な生産－投資戦略についても明示的に導出をした。このため、企業に対して意義のある研究であると考えている。これは、国際及び国内学会あるいは Social Science Research Network 上で発表した。

企業の利益最大化モデルは以下のようなものである。なおこのモデルは離散時点モデルである。

$$\begin{aligned}
\sup_{q\in\mathcal{Q}} \quad & \mathrm{E}_0\Bigg[\sum_{t=0}^{T} \mathrm{e}^{-rt}(Q(q_{S_2,u}(t))S_1(t) - q_{S_2,b}(t)S_2(t)) \\
& -\sum_{t=0}^{T-1} \mathrm{e}^{-rt} R(x_{S_2}(t) + q_{S_2,b}(t) - q_{S_2,u}(t) + x_{F_2}(t,t), S_3(t)) \\
& -\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s=t+1}^{T} \mathrm{e}^{-rs} q_{F_2,b}(t,s)F_2(t,s) \\
& +\mathrm{e}^{-rT}(x_{S_2}(T) + q_{S_2,b}(T) - q_{S_2,u}(T) + x_{F_2}(T,T))S_2(T)\Bigg],
\end{aligned}$$

これを関数解析的な手法を用いて、以下のように現物価格、先物価格とコンビニエンス・イールドあるいは制約条件に対するシャドー・プライスの関係式を導いた。

$$\begin{aligned}
S_2(t) &= Q'(q^*_{S_2,u}(t))S_1(t) + \mathrm{e}^{rt}\lambda_{S_2,u}(t), \\
F_2(t,s) &= \mathrm{E}_t[\mathrm{e}^{-r(T-s)}S_2(T)] - \mathrm{E}_t\left[\sum_{v=s}^{T-1} \mathrm{e}^{-r(v-s)}\partial_q R_v\right] \\
& \quad +\mathrm{e}^{rs}\lambda_{F_2,b_l}(t,s) - \mathrm{e}^{rs}\lambda_{F_2,b_u}(t,s), s = t+1, ..., T \\
S_2(t) &= \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{E}_t[S_2(T)] - \mathrm{E}_t\left[\sum_{v=t}^{T-1} \mathrm{e}^{-r(v-t)}\partial_q R_v\right] + \mathrm{e}^{rt}\lambda_{S_2,b}(t), \\
S_2(t) &= \mathrm{e}^{-r(s-t)}F_2(t,s) - \mathrm{E}_t\left[\sum_{v=t}^{s-1} \mathrm{e}^{-r(v-t)}\partial_q R_v\right] + \mathrm{e}^{rt}\lambda_{S_2,b}(t) \\
& \quad -\mathrm{e}^{rt}\lambda_{F_2,b_l}(t,s) + \mathrm{e}^{rt}\lambda_{F_2,b_u}(t,s), s = t+1, ..., T,
\end{aligned}$$

さらに、最適な生産計画・取引戦略は以下のようになる。

$$q^*_{S_2,u}(t) = I_Q\left(\frac{S_2(t) - \mathrm{e}^{rt}\lambda_{S_2,u}(t)}{S_1(t)}\right)$$

$$(q^*_{S_2,b}(t), (q^*_{F_2,b}(t,s))_{s=t+1,...,T}) = I_{R,t}(q_{0,t,T}),$$

なお、取引戦略はヘッジ戦略と考えることもできる。

また、消費者・投機家の最適な消費・取引戦略を解き、企業に対する必要条件とあわせると、以下のような価格のギャップがありうることが分かった。

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}_{P_N,t}\left[\frac{\partial u(T, c_1^*(T))/\partial c_1 \cdot 1/S_1(T)}{\partial u(t, c_1^*(t))/\partial c_1 \cdot 1/S_1(t)} S_2(T)\right] - \mathrm{E}_t\left[\mathrm{e}^{-r(T-s)}S_2(T)\right] \\
= \ & -\mathrm{E}_t\left[\sum_{v=s}^{T-1} \mathrm{e}^{-r(v-s)}\partial_q R_v\right] + \mathrm{e}^{rs}\lambda_{F_2,b_l}(t,s) - \mathrm{e}^{rs}\lambda_{F_2,b_u}(t,s), s = t+1, ..., T.
\end{aligned}$$

上記の一般的なモデルに対して、いくつかの例を挙げることができ、生産関数と在庫関数が

$$Q(q) = \frac{-\exp(-aq) + 1}{a}, a > 0,$$

$$R(q, S_3) = \left(\frac{\exp(-cq)}{c^2} + \frac{q}{c}\right) S_3, c > 0.$$

のとき、

$$\begin{aligned}
S_2(t) &= \exp(-aq^*_{S_2,u}(t))S_1(t) + \mathrm{e}^{rt}\lambda_{S_2,u}(t), \\
S_2(t) &= \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{E}_t[S_2(T)] - \mathrm{E}_t\left[\sum_{v=t}^{T-1} \mathrm{e}^{-r(v-t)}\partial_q R_v\right] + \mathrm{e}^{rt}\lambda_{S_2,b}(t), \\
S_2(t) &= \mathrm{e}^{-r(s-t)}F_2(t,s) - \mathrm{E}_t\left[\sum_{v=t}^{s-1} \mathrm{e}^{-r(v-t)}\partial_q R_v\right] + \mathrm{e}^{rt}\lambda_{S_2,b}(t) \\
& \quad -\mathrm{e}^{rt}\lambda_{F_2,b_l}(t,s) + \mathrm{e}^{rt}\lambda_{F_2,b_u}(t,s), s = t+1, ..., T,
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\partial_q R_v = \ & \Bigg(-\exp\Bigg(-c\Bigg(x_{S_2,0} + \sum_{s=0}^{v} q^*_{S_2,b}(s) - q^*_{S_2,u}(s) \\
& + \sum_{s=0}^{v} x_{F_2,0,s} + \sum_{w=0}^{s-1} q^*_{F_2,b}(w,s), S_3(v)\Bigg)\Bigg) + 1\Bigg)c^{-1}S_3.
\end{aligned}$$

である。

上記のモデルを、一般化し、複数の企業、複数の消費者・投機家が存在し、複数のコモディティが有る場合でも同様なことが成り立つことを示し、一般均衡が存在することを Debreu の方法などを用いて、証明した。

また、上記の離散時間モデルを連続時間に発展させて企業の最適化問題、消費者・投機家の最適化問題について解き、現物価格、先物価格、コンビニエンス・イールドの関係、最適な生産・取引（ヘッジ）戦略、さらには企業と投機家による価格のギャップの関係式を導いている。

連続時間モデルでは、技術的な問題により関数解析的な手法は利用できず、確率制御論を応用した方法により展開している。

今後は、incomplete market を前提の下でこの研究を発展させる。これは Schwartz model では明らかにされていないコンビニエンス・イールドの挙動を示すことになり、コモディティ市場の理解につながると考えられる。そして、長期的には貨幣市場を含む金融市場全体のモデルの構築に展開する。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）
① Nakajima, Katsushi, Kazuhiko Ohashi, “Commodity Spread Option with Cointegration,” Asia-Pacific Financial Markets, 査読有, vol. 23, no. 1, 2016, pp. 1-44. http://link.springer.com/article/10.1007/s10690-015-9207-1

〔学会発表〕（計　５件）
① Nakajima, Katsushi, “Commodity Spot and Futures Prices under Supply, Demand, and Financial Trading,” Quantitative Methods in Finance Conference 2015, 2015 年 12 月 15 日, University of Technology, Sydney, Australia.
② Nakajima, Katsushi, “Commodity Spot and Futures Prices under Supply, Demand, and Financial Trading,” JAFEE 2015 夏季大会, 2015 年 8 月 7 日, 中央大学市ヶ谷田町キャンパス（東京都新宿区）.
③ Nakajima, Katsushi, “Commodity Spot and Futures Prices under Supply, Demand, and Financial Trading,” Stochastics and Computational Finance 2015, 2015 年 7 月 6 日, University of Lisbon, Portugal.
④ Nakajima, Katsushi, “Convenience Yield Revisited: Using Profit Maximization Discrete-Time Model,” 日本ファイナンス学会第 23 回大会, 2015 年 6 月 6 日, 東京大学（東京都文京区）.
⑤ Nakajima, Katsushi, “Convenience Yield Revisited: Using Production Based Discrete-Time Model,” JAFEE2014 夏季大会, 2014 年 8 月 1 日, 成城大学（東京都世田谷区）.

〔図書〕（計　１件）
① 大橋和彦、中島克志、『コモディティ市場と投資戦略』(第 8 章)、(編集、池尾和人、大野早苗)、勁草書房、2014 年、p.328（pp.189-209)。

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
https://sites.google.com/site/katsushinakajimaresearch/research

http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2603946

http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2758433

６．研究組織
(1)研究代表者
中島　克志（NAKAJIMA, Katsushi）
立命館アジア太平洋大学・国際経営学部・助教
研究者番号：90721572

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：