

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 5 日現在

機関番号：12501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26780504

研究課題名(和文) 学校数学における証明の構想の振り返りに焦点を当てた学習過程の構築：議論に着目して

研究課題名(英文) Characterization of learning processes of students reflection on their processes of planning a proof based on S. E. Toulmin's concept of argumentation

研究代表者

辻山 洋介(Tsujiyama, Yosuke)

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号：10637440

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、証明の構想の取り組みを振り返る活動に焦点を当て、その取り組み方を生徒が身に付けるために必要な学習過程を、議論を視点とした理論的・実践的考察によって構築することを目的とした。この目的を達成するために、科学哲学者トゥールミンに依拠して議論と証明活動の特性を考察し、考察をもとに学習過程を立案し、学習過程を位置付けた授業を中学校数学科において計画、実施、分析するサイクルに繰り返し取り組んだ。そして、事柄の推測、証明の構想と構成、複数の証明に基づく各構想の評価、構想を活用した別の事柄の発見と元の事柄との関係の追究を位置付けた学習過程を構築した。

研究成果の概要(英文)：Proving is an essential component in mathematical activities, but a difficult one for many students. We assume that one reason for this might be that unsuccessful arguments made during the process of planning a proof do not appear in the completed proof, and therefore students cannot see how those arguments influenced the proof. If students could reflect on such arguments, they would be able to learn about proving. This study focused on Toulmin's studies on argumentation, characterized processes of proving concerning its plausibility and probability, and examined students' learning processes by designing, implementing, and analyzing eighth-grade geometry lessons. It constructed a learning process that consists of conjecturing statements, planning and constructing proofs of the statements, reflecting on the processes of planning proofs based on constructed proofs, finding new statements and considering the relationship between the initial and new statements based on the plans.

研究分野：数学教育学

キーワード：数学教育 証明の構想 証明 振り返り argumentation 議論 トールミン 学習過程

### 1. 研究開始当初の背景

証明は、数学的な理解の深化や、日常生活における思考や判断の合理化において重要な役割を果たす。そのため、証明学習の重要性は国内外を問わず広く認められている。しかし、証明を生成したり、数学の探究や日常的な判断に証明を活用したりすることに、多くの生徒は困難を抱えている。この状況を改善するために、証明の構想の立て方に焦点を当て、生徒が自分の力で証明の構想を立て、証明の生成や活用に取り組みやすにすることが、数学教育の実践上及び研究上の重要な課題となっている。

この課題の解決を目指し、本研究は以下の二つのアプローチから考察を行った。第一に、議論(argumentation)を視点として、証明の構想を理論的に特徴付けることである。証明の構想における推論はあくまでも予想であり、妥当であるかどうかはその時点では不明である。この意味での不確実性に着目することは、証明という結果ではなく証明活動という営みとして生徒の取り組みを捉えるアプローチとも、数学者の研究活動の本性とも整合的である。そのため、本研究は議論を視点とし、不確実な論を立てる行為と、その論を評価し、論の改善や他の論の探究をする行為に着目して証明の構想を特徴付けることにした。このことにより、生徒の不確実な発想をいかした創造的な証明学習の実現につなげることを目指した。

第二は、証明の構想を振り返る活動に焦点を当てた学習過程を構築することである。証明の構想の立て方を明示的な学習内容とするならば、証明の構想に取り組む活動自体とは別に、その取り組みを意識化し、取り組み方を評価・改善する活動や、その取り組みにおいて得た着想や問いをもとに探究する活動など、証明の構想を振り返る活動が必要となる。このような活動を意図的かつ計画的に取り入れるためには、その活動を学習過程に位置付けておかなければならない。そこで本研究は、証明の構想の振り返りに焦点を当てた学習過程を構築することにした。

### 2. 研究の目的

以上から、本研究は、証明の構想の取り組みを振り返る活動に焦点を当て、その取り組み方を生徒が身に付けるために必要な学習過程を、議論を視点とした理論的・実践的考察によって構築することを目的とした。

### 3. 研究の方法

前述の研究目的を達成するために、本研究は以下の手続きで研究を進めた。

- (1) 理論的考察による学習過程の立案
- (2) 予備調査の計画・実施・分析による学習過程の再検討
- (3) 本調査の計画・実施・分析による学習過程の妥当性の検証

まず(1)について、科学哲学者トゥールミ

ンの議論研究をはじめ、数学教育学と科学哲学を中心とした関連文献を精読し、証明の構想の振り返りに焦点を当てた学習過程を暫定的に考案した。次に(2)について、中学校教師の協力を得ながら、暫定的な学習過程を実践的に検討するために、中学校第二学年図形領域において予備調査を計画・実施し、その分析をもとに学習過程を再検討した。そして(3)について、予備調査時とは別の中学校教師の協力を得ながら、中学校第三学年選択教科において本調査を計画・実施し、その分析をもとに学習過程の妥当性を検証した。

なお、研究開始当初は、(2)の予備調査は平成27年度に2名のペアを対象として実施し、(3)の本調査は、予備調査の協力者を授業者とした一斉授業の形で実施する予定であった。調査協力者等の事情により、予備調査を平成26年度に前倒しし、2時間連続の一斉授業の形で実施することになり、また、予備調査と本調査とで実施校と授業者を変更することになった。しかし、研究計画を修正するとともに、平成28年度に新たな実施校の協力を得て、授業を約10回観察し、生徒の様子や学習状況等を把握した上で、授業者の助言を得ながら、学習過程を新たな実施校の状況に即して具体化することができた。このように、研究計画を多方面から柔軟に変更することにより、予定通りの研究成果を得ることができた。

### 4. 研究成果

#### (1) 証明の構想の特徴付け

まず、本研究課題に至るまでの筆者の研究成果に、証明と証明活動に関する近年の研究の知見を加え、証明の構想を「事柄が真であることを示すために利用可能な要素や要素間の関連を予想すること」と規定した。同時に、証明の構成を「要素や要素間の関連を演繹的な推論によって組織化することにより、事柄が真であることを示すために証明を生成すること」と規定した。

また、トゥールミンの著書 *The uses of argument* を具体的に解釈することにより、議論を「他者と相互作用しながら、蓋然的であっても、擁護しながら論を立てること、並びに文脈に即して論を評価することにより、主張を正当化すること」と規定した。この規定の背景には以下の研究上の課題があった。

近年の証明研究では、トゥールミンの「論のレイアウト」が援用され、生徒の証明活動の中でも証明の構想に相当する過程が分析され、生徒が抱える困難の要因等が実証的に指摘されている。他方、先行研究は、生徒の実際の活動を記述することを主としている。言い換えれば、議論の概念自体については理論的な検討が十分になされておらず、議論とはそもそも何であり、どのように取り組む営みであるのかが明らかにされていない。学習指導の改善を目指し、不確実な考えをいかして証明の構想に取り組む力を生徒が身に付

けられるような学習指導を考案するためには、まずもって議論のあり方を理論的に明らかにしなければならない。そのため、トゥールミンの研究に立ち返り、「論のレイアウト」を提案する前提として、トゥールミンが議論をどのように捉えていたのかを明らかにする必要があった。そのため、トゥールミンが著書 *The uses of argument* の第 4 章において「論のレイアウト」を提案する以前に、第 3 章において蓋然性に着目して議論のあり方を説明している箇所を中心に、議論の意味を解釈した。具体的には、トゥールミンは、第 4 章「論の場と様相」において、「できない」などの様相語が実際の論の使用においてどのように機能するのかを具体的な場面に即して考察し、様相語を含む論の力と基準が、場に依存せず不変であるのか、あるいは場に依存して異なるのかを分析した。次に、第 5 章「蓋然性」において、第 4 章の考察を通じて明らかとなった様相語の実際的な機能と先行研究の検討に基づき、様相語の中でも特に、「おそらく」などの蓋然性を表す様相語が、実際の論の使用においてどのように機能するのかを考察した。これらの考察を通じて、蓋然的な論を使用する営みを示す概念である議論を、蓋然性を表す様相語の機能によって特徴付けた。本研究は、以上の内容を具体的に解釈することにより、先述の概念規定を得た。

さらに、証明の構想と議論との概念間の関係を理論的に分析することにより、証明の構想における議論の意味を特徴付けるとともに、その意味を、他の先行研究において捉えられてきた証明の構想の側面と比較することにより、議論の重要性を明らかにした。具体的には、議論を視点とすることにより、証明の構想における次の二つの過程を顕在化することが可能になることを明らかにした。第一は、事柄が実際に真であるか偽であるかが不明であるにもかかわらず、一旦は真であるとみて、真であることを示そうとする過程である。第二は、実際に利用可能であるかは不明であっても、予想した要素や要素間の関連を擁護しながら提示し、それらの要素や要素間の関連に着目した理由を説明する過程である。

## (2) 証明の構想の振り返りに焦点を当てた学習過程

### 予備調査

以上の特徴付けをもとに、特に第二の特徴に焦点を当て、証明の構想の振り返りに焦点を当てた学習過程を暫定的に考案した。そして、証明の構想と構成、構成した証明に基づく構想の意識化、構想を活用した別の事柄の発見とその証明の構成という三つの活動を学習過程に位置付けた。そして、教材研究をもとに学習過程を具体化し、中学校第二学年図形領域において 2 時間連続の一斉授業の形で予備調査を行った。分析の結果、暫定的

な学習過程の実現可能性が検証されるとともに、次の示唆と課題が得られた。

第 1 時の授業では、証明の構想と構成の後に、構想を意識化させることを中心とした。分析の結果、構想の意識化を促す教師の手立てとして、成功につながった構想と不成功に終わった構想とを生徒に比較させ、前者については「なぜうまく行ったのか」、後者については「なぜうまく行かなかったのか」を問うことが有効である可能性が示唆された。

第 2 時には、前時の構想を活用した別の事柄の発見とその証明の構成を中心とした。分析の結果、前時に不成功に終わった証明の構想を教師が再提示し、「この考えをいかすことはできないか」や「次に何を証明できそうか」を問うことが、この活動を促す可能性が示唆された。

課題として、(1)の末尾で述べた証明の構想の特徴の第一を反映させるためには、事柄の推測を位置付ける必要があることが明らかになった。具体的には、予備調査においては生徒にとって未証明ではあるが既知の事柄を扱ったため、事柄が「真であるか偽であるかが不明である」状況に生徒は直面しなかった。同様な他の題材を用いても、生徒の反応は同様であった。そのため、証明の構想の前に、事柄の推測を学習過程に含めることと、事柄の推測を含めた教材研究と場面設定が必要であることが明らかになった。

### 本調査

前述の課題を受け、推測と証明活動の関係に関する先行研究の知見を再検討した結果、事柄の推測における生徒の取り組みがその後の証明活動に影響を及ぼすことが示唆された。そのため、推測を通じて複数の証明の構想が得られることを考慮した上で学習過程を修正した。そして、事柄の推測、証明の構想と構成、複数の証明に基づく各構想の評価、構想を活用した別の事柄の発見と元の事柄との関係の追究を学習過程に位置付けた。そして、教材研究をもとに学習過程を具体化し、中学校第三学年選択教科において 3 時間連続の一斉授業の形で本調査を行った。分析の結果、学習過程の実現可能性が検証されるとともに、学習指導への示唆が得られた。

第一は、証明の構想において生徒が陥った困難な状況を明示し、その状況をどのように乗り越えたのかを意識化させることが、証明の構想の評価だけでなくその活用をも促すことである。本調査では、乗り越え方が大別すると二通りある問題を取り上げた。それら二通りに気づいた生徒にそれぞれ発表をさせ、それぞれの特徴やよさを教室全体で比較検討する活動を取り入れたことが、その後の活用を促した可能性が示唆された。

第二は、発見した別の事柄の証明において、前述の二通りの構想を活用することが、元の事柄との統合を促すことである。本調査では、事柄の発見において二通りの構想の両者を活用する活動は、授業前に明確に意図されて

いたわけではなく、授業中の生徒の取り組みをもとに授業者が促した活動であった。今後はこの示唆をもとに、学習過程を実現するためのより具体的な方策を考察していく必要がある。

また、予備調査と本調査のいずれにおいても、証明の構想における不成功な考えを含む蓋然的な議論を振り返ることが、証明の構成（問題の解決）にも、新たな疑念や問いの発生や新たな事柄の発見（問題の設定）にもつながった。また、問題の解決と設定はこの順序で独立して行われるのではなく、相互に関係しながら行われていた。今後は、調査を通じて明らかになったこの過程に焦点を当て、証明の構想に基づく問題解決・問題設定を促進する手立てを、議論の蓋然性に着目して考察していく必要があると考えられる。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計5件)

1. Tsujiyama, Y., & Yui, K., 'Use of examples of unsuccessful arguments to facilitate students' reflection on their proving processes'. Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education (8 pages), <https://www.conftool.pro/icme13/> 2016年7月。(査読有)
2. 辻山洋介, 「S. E. ツールミンにみる argumentation の意味とその数学教育上の意義: 証明の構想の過程に焦点を当てて」, 敬愛大学国際学会『敬愛大学国際研究』, 第29巻, pp. 1-28, 2016年2月。(査読有)
3. Komatsu, K., Tsujiyama, Y., & Sakamaki, A., 'Rethinking the discovery function of proof within the context of proofs and refutations'. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(7), pp. 1053-1067, 2014年10月。(査読有)
4. 辻山洋介・油井幸樹, 「『平行四辺形の性質』において課題探究として証明することの授業化」, 日本数学教育学会誌『数学教育』, 第96巻第9号, pp. 22-25, 2014年9月。(査読有)

〔学会発表〕(計7件)

1. 青山和裕・辻山洋介・永田潤一郎・小松孝太郎, 「課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域『資料の活用』における授業化に向けて」, 日本科学教育学会第40回年会, 分科会2A-1G, ホルトホール大分(大分), 2016年8月20日(論文集 pp. 93-96に掲載)
2. 高橋伸茂・青山和裕・辻山洋介・永田潤一郎・小松孝太郎, 「課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域『資料

の活用』における授業化の試み」, 日本科学教育学会 第40回年会, 分科会2A-1G, ホルトホール大分(大分), 2016年8月20日。(論文集 pp. 97-100に掲載)

3. 辻山洋介・永田潤一郎・青山和裕・小松孝太郎, 「課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域『資料の活用』における『活動-内容対応表』の作成」, 日本数学教育学会 第4回春期研究大会, 創成型課題研究の部, 埼玉大学(埼玉), 2016年6月12日(論文集 pp. 173-176に掲載)
4. 永田潤一郎・青山和裕・辻山洋介・小松孝太郎, 「課題探究として証明することのカリキュラム開発: 領域『資料の活用』の開発枠組みの構築」, 日本数学教育学会 第3回春期研究大会, 創成型課題研究の部, 東京理科大学(東京), 2015年6月28日。(論文集 pp. 19-22に掲載)
5. 小松孝太郎・辻山洋介, 「学校数学における証明と論駁の活動を促すデザイン実験の構想」, 日本数学教育学会 第47回秋期研究大会, 分科会I3, 熊本大学(熊本), 2014年11月8日。(発表集録 pp. 379-380に掲載)
6. 辻山洋介・油井幸樹, 「中学校図形領域における課題探究として証明することの授業化: 第2学年の内容『平行四辺形の性質』」, 日本数学教育学会 第2回春期研究大会, 創成型課題研究の部, 東京学芸大学(東京), 2014年6月29日。(論文集 pp. 101-106に掲載)

〔その他〕

ホームページ等

[http://mathematics-edu.net/cms/htdocs/?page\\_id=98](http://mathematics-edu.net/cms/htdocs/?page_id=98)

#### 6. 研究組織

(1)研究代表者

辻山 洋介 (TSUJIYAMA, Yosuke)

千葉大学・教育学部・准教授

研究者番号: 10637440