

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 30 日現在

機関番号：32675

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26790082

研究課題名(和文) 符号付き超離散化法の確立と可積分系への応用

研究課題名(英文) Establishment of ultradiscretization with parity variables and its application to integrable systems

研究代表者

磯島 伸 (ISOJIMA, Shin)

法政大学・理工学部・准教授

研究者番号：90422394

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、超離散戸田方程式の振動解・符号付き超離散パンルヴェII型およびIII型方程式とそれらの特殊解系列・超離散カルマンフィルタの提案と検証・非線形バネ方程式とその保存量の符号付き超離散化・超離散交通流モデルの構成など、符号付き超離散化法の適用例を多数提出し、符号付き超離散化法の新しい実践例を示すと共にその有効性を検証することができた。また、その過程で符号付き超離散化法について種々の技術的な知見も得られた。行列式の符号付き超離散化など一般的な理論への拡張や連続系への知見の還元についてはまとまった成果に至らず、今後も研究を継続する必要がある。

研究成果の概要(英文)：In this research, many results on the method of ultradiscretization with parity variables (p-UD) were obtained, such as, oscillatory solutions of the p-UD Toda equation, a class of special solutions of the p-UD Painleve II and III equations, proposal of ultradiscrete Kalman filtering and its validation, p-UD of the nonlinear spring equation and its preserving quantity, ultradiscrete traffic-flow models. New examples of p-UD were proposed, and validity of the method was discussed. Some technical notes of the method are also recognized through these studies.

On the other hand, it is not sufficient to extend these results to a general theory (for example, ultradiscretization of the determinants), and to give back to continuous systems. Additional research is required to resolve these questions.

研究分野：非線形可積分系

キーワード：超離散化 可積分系 パンルヴェ方程式 戸田格子方程式 カルマンフィルタ 交通流モデル

1. 研究開始当初の背景

超離散化とは、微分方程式と、全ての変数が離散値を取る力学系であるセルオートマトンとを、差分方程式を介して直接対応させる極限操作である。将来はこの手法を用いて微分方程式と CA を自在に翻訳しながら現象解析を行う理論体系の構築が目指されている。しかしながら、この手法を適用できる差分方程式のクラスは、解が正值であり、方程式に減算を含まないものに限られる。この制約は「(超離散化における)負の困難」とも呼ばれる。

研究代表者は「負の困難」の解消に向けて、『符号付き超離散化』という手法を共同提案した。その数学的基礎を確立することは、より広いクラスの差分方程式の超離散類似を研究するため不可欠であった。そして、その基礎の確立のためには、さらに符号付き超離散化の適用事例を蓄積して、具体的な問題点や対処法を研究する必要があった。

2. 研究の目的

本研究は、可積分系の方程式およびその解の符号付き超離散類似を構成する過程を通して、符号付き超離散化の手法の有効性および限界を検証し、この手法の数学的基礎を確立することを目的とする。具体的な目標として「行列式の代数構造を保存する超離散類似の研究」、「線形方程式の符号付き超離散類似の解空間の構造の研究」、「複素数値変数を超離散化する手法の探索」を挙げる。

3. 研究の方法

(1) q 差分パンルヴェ方程式 (II 型, III 型) や離散戸田方程式、および行列式で表示されるそれらの特殊解系列の符号付き超離散類似を構成し、符号付き超離散化による行列式の取り扱いの感触を確かめ、一般化への準備とする。

(2) 線形方程式や保存量を持つ簡単な非線形方程式の超離散類似を構成し、その解空間の構造を研究する。特に不定解の理論的な取り扱いを明らかにすることを目指す。

(3) 上記の研究事例を総合し、行列式の代数構造を保持した超離散類似、符号付き超離散系の解空間の構造、複素数値への拡張などへの一般化を目指す。

4. 研究成果

(1) 符号付き超離散戸田方程式の振動解構成

符号付き超離散戸田方程式の、振動現象を記述する特殊解を構成する研究を行い、論文にまとめて発表した(雑誌論文)。この解は、離散戸田方程式の特殊解から決まった手続きにより構成可能である。この手続きでは減算を含む解を扱う必要があり、従来の超離散化の手法では困難なものである。この成果は符号付き超離散化の有効性を示す一例となる。

(2) 符号付き超離散パンルヴェ方程式とその特殊解系列の研究

符号付き超離散パンルヴェ III 型方程式の特殊解の系列を、 q 差分パンルヴェ III 型方程式の特殊解系列から直接導いた。差分系の解は行列式によって表示され、符号付き超離散化の手法の導入によりその超離散極限を考察することができた。この成果は学会・研究集会で発表した他、論文としてまとめ、発表した(雑誌論文)。この研究により、符号付き超離散化法による行列式の取り扱いに関する新しい例を提示することができた。

以前研究した符号付き超離散パンルヴェ II 型方程式の特殊解の系列について、より広いクラスの特殊解を求め、その数理構造を研究した。対応する差分系の解は行列式によって表示される。過去の計算と研究経験の蓄積があるため研究は順調に進行し、以前の研究で得られたものより広いクラスの特殊解を導出することができた。さらに、この解がより複雑な振る舞いを見せることも明らかにし、符号付き超離散系の解空間の豊かさを示した。この成果は論文にまとめて発表するとともに(雑誌論文)、国際会議や国内学会などで発表した。

上でも述べたように、これらの特殊解は、連続系、離散系においては行列式による表現が知られている。その具体的な挙動を調べるためには相当な計算量を必要とするが、超離散系では比較的簡単に漸近挙動を調べることができる。この超離散系における成果が、離散系・連続系に今後還元されることが期待される。また、可積分系の超離散化において重要になると考えられる「行列式の超離散類似の研究」に向けた具体例の蓄積も進んでいると言える。

(3) 超離散化を応用した非線形フィルタリングの提案

QRT 系はある 3 次正方行列を用いて記述される非線形可積分方程式系である。この系に含まれる方程式の 1 つは、従属変数の 2 次式で表される保存量を持ち、方程式のパラメータを調整することで三角関数によって表示可能な周期解を持つ。このような周期解は定符号ではないため、通常の超離散化で扱うことは困難である。この方程式に対して符号付き超離散化の手続きを施し、周期系の超離散類似を研究した。その結果、不定型発展において従来の例とは異なる様子が確認され、比較的緩い条件で周期解が存在することが明らかになった。この結果を応用し、ノイズを含む非線形方程式を超離散化によって区分線形近似したのちにノイズを除去するフィルタリングを施す「超離散カルマンフィルタ」の手法を提案するとともに、数値シミュレーションによりその有効性を検証した。この成果を共同研究として論文にまとめ、発表

した(雑誌論文,).

符号付き超離散 QRT 系の解の構造は既知の符号付き超離散系のものとは若干異なっており, 解に関する新たな知見が得られた. また, 符号付き超離散系の工学的応用を具体的に提案することができた.

(4) 保存量を持つ非線形バネ方程式の符号付き超離散化の研究

非線形バネ方程式は従属変数の 4 次式で表される保存量を持つ可積分な方程式であり, 前述の QRT 系の特別な場合でもある. この方程式は楕円関数で記述される周期解を持つ. この方程式および保存量の符号付き超離散類似を構成し, 解析した.

その結果, 期待された周期解の他に, 複雑な挙動を示す解が存在することが明らかになり, 解の特徴を表現する図式を提案して解の挙動を分類した. 保存量の超離散類似については, それが実際に保存量になる場合とそうでない場合があること, それぞれの場合と前述の解の挙動には対応関係があることを明らかにし, この意味で超離散バネ方程式の解と保存量の分類を与えることができた. この結果は, 学会で発表するとともに論文としてまとめて学術雑誌に投稿し, 現在査読中である.

この結果は解の定性的挙動に加えて, 保存量という数理構造が符号付き超離散系に引き継がれることを示す新しい例である.

(5) 交通流モデルへの応用

超離散化の応用として, ある交通流モデルと離散時間可積分系の方程式を関連付けて交通流の離散時間モデルを提案し(雑誌論文), さらに超離散化法を用いて交通流のセルオートマトンモデルを構成する研究を推進した. 得られたモデルは厳密解を持ちうるものが通常交通流のセルオートマトンモデルと異なる点である. 実際に厳密解を構成し, 挙動を解析することで交通流モデルとしての妥当性があることを確認した. 得られたモデルを用いて, より一般的な道路状況に対応する数値解析を行うことは今後の課題となる. この結果は国内学会, 国内研究集会, 国際学会にて発表し, また論文にまとめて現在学術雑誌に投稿中である.

総括:

研究期間全体では, 上記のように符号付き超離散化法の新しい適用例を多数得ることができた. 行列式の超離散化など一般的な理論への拡張や複素数値への拡張についてはまとまった成果に至ることができず, 今後も研究を続けていく必要がある.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

Shin Isojima: Bessel function type solutions of the ultradiscrete Painlevé III equation with parity variables, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 34, Issue 2 (2017) pp. 343-372, 査読有.
DOI:10.1007/s13160-017-0250-3

鈴木大庸, 磯島伸: 離散可積分系による Newell-Whitham モデルの時間差分化とその解, 研究集会報告「非線形波動研究の深化と展開」28A0-S6, 九州大学応用力学研究所, 2017 年 3 月, pp.61-66, 査読有.
https://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/opac_download_md/1832809/Article_10.pdf

ISOJIMA, Shin, SATSUMA, Junkichi: Application of Ultradiscrete Kalman Filter to a Physical System, The Bulletin of Musashino University, Musashino Center of Mathematical Engineering, No. 1 (2016) pp. 27-35, 査読有.
https://mu.repo.nii.ac.jp/?action=repository_uri&item_id=252

Hikaru Igarashi, Shin Isojima and Kouichi Takemura: New Airy-type solutions of the ultradiscrete Painlevé II equation with parity variables, J. Phys. A: Math. Theor., Vol. 49, No. 14 (2016) 145207 (17pp), 査読有.
DOI:10.1088/1751-8113/49/14/145207

Junkichi Satsuma, Shin Isojima: Nonlinear Kalman filtering via ultradiscretization procedure, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 33, Issue 1 (2016) pp. 227-238, 査読有.
DOI:10.1007/s13160-015-0206-4

磯島伸: パンルヴェ III 型方程式のある特殊解系列の超離散極限, 研究集会報告「非線形波動研究の現状 - 課題と展望を探る - 」26A0-S2, 九州大学応用力学研究所, 2015 年 3 月, pp. 101-108, 査読有.
https://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/opac_download_md/1807500/Article_17.pdf

S. Isojima: On exact solutions with periodic structure of the ultradiscrete Toda equation with parity variables, J. Math. Phys., Vol. 55, Issue 9 (2014) 093509 (12 pages), 査読有.
DOI:10.1063/1.4895916

[学会発表](計 11 件)

鈴木大庸, 磯島伸: exponential Newell-Whitham モデルの超離散化とその解, 日本応用数理学会 2018 年研究部会連合発表会, 大阪大学吹田キャンパス, 2018 年 3 月

16 日.

Kouyo Suzuki, Shin Isojima :
Ultradiscrete Exponential Newell-Whitham Model: A Cellular-Automaton Model for Traffic flow, 8th International Conference on Industrial Engineering and Operations Management (IEOM 2018), Hilton Bandung Hotel, Bandung, Indonesia, 2018 年 3 月 8 日.

鈴木大庸, 磯島伸 : 双線形化法による離散時間 Newell-Whitham モデルの特殊解の構成, 研究集会「非線形波動研究の新潮流 -- 理論とその応用--」, 九州大学応用力学研究所, 2017 年 11 月 10 日.

外山弘貴, 磯島伸 : 符号付き超離散バネ方程式の解の分類, 日本応用数理学会 2017 年研究部会連合発表会, 電気通信大学, 2017 年 3 月 6 日.

鈴木大庸, 磯島伸 : 離散可積分系による Newell-Whitham モデルの時間差分化, 日本応用数理学会 2016 年度年会, 北九州国際会議場, 2016 年 9 月 13 日.

Shin Isojima: New Airy-type solutions of the ultradiscrete Painlevé II equation with parity variables, The 3rd China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems, Jiyuan International Hotel, Xi'an, China, 2016 年 8 月 21 日 .

Shin Isojima: New Airy-type solutions of the ultradiscrete Painlevé II equation with parity variables, Workshop ' Infinite Analysis 16, New Developments in Integrable Systems ' , Osaka City University, Faculty of Science, Bldg. E, Osaka-shi, Japan, 2016 年 3 月 25 日 .

五十嵐光, 磯島伸, 竹村剛一: q 差分エアリー方程式の一般解に対応する超離散パンルヴェ II 型方程式の特殊解, 日本応用数理学会 第 12 回研究部会連合発表会, 神戸学院大学ポートアイランドキャンパス, 2016 年 3 月 5 日.

浅川泰裕, 磯島伸 : 非線形バネ方程式と保存量の符号付き超離散化について, 日本応用数理学会 2015 年度年会 応用可積分系 OS, 金沢大学角間キャンパス, 2015 年 9 月 9 日.

磯島伸 : パンルヴェ III 型方程式のある特殊解系列の超離散極限, 研究集会「非線形波動研究の現状 課題と展望を探る」, 九州大学応用力学研究所, 2014 年 11 月 1 日.

磯島伸 : パンルヴェ III 型方程式の特殊

関数解の超離散極限, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 広島大学東広島キャンパス, 2014 年 9 月 26 日.

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

磯島伸 (ISOJIMA, Shin)
法政大学・理工学部・准教授
研究者番号 : 90422394