

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 13 日現在

機関番号：13901

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2015

課題番号：26800009

研究課題名(和文) 高次前射影多元環の表現論の研究

研究課題名(英文) Study of representation theory of higher preprojective algebras

研究代表者

水野 有哉 (Mizuno, Yuya)

名古屋大学・高等研究院(多元)・YLC特任助教

研究者番号：30726352

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主な目的は、古典的重要なクラスである前射影多元環多元環を一般化した高次前射影多元環多元環を研究する事である。

そのために傾理論を用いる事でn無限表現型多元環といわれるクラスの多元環の新たな構成方法を与えた。そしてそこから得られる高次前射影多元環の圏論的性質を調べ、特に導来圏同値となるものを与えた。これらの成果は学術雑誌に掲載されている。またこれらの成果は国内外の会議で発表された。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study is to study higher preprojective algebras. They are generalizations of preprojective algebras, which are one of the most important classes of algebras. To this end, we give a way to construct n representation-infinite algebras by using tilting theory. Moreover we study their categorical properties, and in particular, provide derived equivalence classes of algebras. These results are published as academic papers. We also give talks in international domestic and foreign conferences.

研究分野：代数学

キーワード：前射影多元環 傾理論 導来圏 Auslander-Reiten理論 三角圏 変異 クイバー 多元環

1. 研究開始当初の背景

60年代後半に Gabriel により籠 (クイバー) が表現論に導入され、その後 Auslander らにより有限次元多元環の表現論は大きく進展した。中でもホモロジー代数的観点から加群圏を調べる Auslander-Reiten 理論や、傾複体が導来圏同値を統制する事を定式化した傾理論 (Tilting theory) の意義は大きい。現在では様々な多元環に対してその加群圏や導来圏を調べる事は基本的問題のひとつになっている。また多元環の表現論は可換環論、代数幾何学、量子群や数理論理などの様々な分野と相互に関わって発展している。そして多元環の表現論は、一般のアーベル圏や三角圏を調べる上でも、重要な研究題材を与えており、とりわけ近年導来圏や三角圏といった圏論は重要な役割りを担っている。

その中でも重要な多元環のひとつとして前射影多元環がある。これは 80 年頃 Gelfand-Ponomarev により導入され、それ以後 Dlab-Ringel や Baer-Geigle-Lenzing ら多くの研究者によってその表現論は研究されてきた。この多元環はルート系などの組み合わせ論やリー代数や代数幾何学など他分野とも多くの繋がりを持ち、多方面から研究されている多元環のひとつでもある。それゆえこの多元環の圏構造を理解する事はそれ自身意義があるだけでなく、他分野への応用としても非常に重要になってくる。

多元環の基本的な不変量は大域次元であり、これは環およびその加群圏の複雑さを計るものである。もっとも単純な大域次元 0 の多元環は半単純環であり、これは Artin-Wedderburn の定理によりその加群圏構造は理解されている。次に基本的クラスが大域次元 1 の多元環であり、これはサイクルを持たない籠の道多元環として特徴付けられる事が知られている。このクラスに関しては多元環の表現論の歴史において非常に多くの研究がなされてきた。一方で大域次元が 2 以上の場合には Canonical 多元環や Auslander 多元環という重要なクラスがある一方で、その複雑さから十分な研究がなされていない。

近年になり Iyama により高次元 Auslander-Reiten 理論が提唱された。これは今までほとんど研究されてこなかったより大域次元が高い多元環に対しても、その理解を与えるものである。そしてそのなかで前射影多元環の一般化である高次前射影多元環も導入された。この多元環を取り扱う事で古典的な場合に現れる様々なよい性質を、より包括的に理解でき、それゆえその性質や多元環の構成方法を詳しく理解することがまた問題となっていた。

2. 研究の目的

前射影多元環は wild というもっとも複雑なクラスに分類され、その加群圏の理解は困難と考えられてきた。しかし近年になり非 Dynkin 型前射影多元環の場合に Buan-Iyama-Reiten-Scott は傾加群を用いることでその加群圏の理解を大きく進展させた。ここで傾加群とは導来圏同値を与えるもっとも重要な対象のひとつである。そしてその傾加群を Coxeter 群でパラメトライズさせる事で、圏論的な対象を組み合わせ的に理解可能になる事が示された。そしてこれによって傾複体に関して構成方法を与え、導来圏に対しても理解が進んでいった。

一方で Dynkin 型の場合はその前射影多元環は自己入射加群となる。すなわちすべての射影加群は同時に移入加群となる。それゆえこの多元環上では傾加群は射影加群のみとなり、非 Dynkin 型の時と同様の手法が使えず、加群圏や導来圏が調べられずこれを理解することが課題となっていた。

また一方で道多元環は非常に基本的かつ重要なクラスであるが、前射影多元環は、道多元環からテンソル代数として構成される事が知られている。高次元 Auslander-Reiten 理論の観点から、道多元環を一般化したクラスとして n 有限表現型多元環および n 無限表現型多元環 (ここで n は任意の自然数) が導入された。これらは大域次元が n である特別な多元環で、 $n=1$ の場合には道多元環となる。これらのクラスは道多元環を持つ様々なホモロジカルな良い性質を合わせ持つ事が知られている。そしてこれらのテンソル代数として与えられる高次前射影多元環は、古典的な場合と同様にとりわけ良い性質を持つことが知られていた。

それゆえこの高次前射影多元環を理解する上でも n 有限表現型多元環および n 無限表現型多元環を構成することが問題となる。 n 有限表現型多元環に対してはいくつかの先行研究によって構成方法が調べられていた。一方で n 無限表現型多元環の場合はより複雑になり、まだ十分な例が与えられておらずこの構成を与える事が問題になる。

さらにこの多元環からテンソル代数として得られる高次前射影多元環の導来圏は、カラビヤウ三角圏という特別な性質を持つ事が知られていた。この圏は様々な観点から調べられている重要な圏の一つでこのような三角圏を理解することもまた課題となっていた。そのためにもこの多元環において、傾加群を構成する事が問題となり、これによってまた導来圏同値な多元環を理解する事にも繋がる。

3. 研究の方法

まず(通常の) Dynkin 型前射影多元環の研究に関して述べる。この多元環は自己入射多元環であるので、傾加群は射影加群となり非 Dynkin 型と同じ手法は使えなかった。

そこで近年導入された傾加群の一般化となる台 τ 傾加群というものに着目した。台 τ 傾加群とは、任意の有限次元多元環において定義され、クラスター理論や t 構造とよばれるものなど他の様々な対象とも結びつく非常に重要な概念である。そして Dynkin 型前射影多元環に対して、台 τ 傾加群全体と Weyl 群の元が一一対応する事が分かっていた。台 τ 傾加群の持つ顕著な性質の一つとして、台 τ 傾加群は 2 項準傾複体と一一対応を持つことが知られている。ここで準傾複体とは傾複体を一般化した概念である。そしてこの対応を用いる事で 2 項準傾複体に関しては分類することが出来ていたので、そこから 2 項傾複体に関しても分類を与えられる。そしてここから得られた組合せ論との対応を、一般の傾複体にも拡張する事が考えられる。そしてそれによって傾複体を分類を行う。

次に高次前射影多元環の研究に関して述べる。古典的結果として、道多元環に対して APR 傾加群という特別な傾加群を構成出来る事が Bernstein-Gelfand-Ponomarev および Auslander-Platzbeck-Reiten らにより示されていた。そして APR 傾加群の自己準同型環は、その箝を反転させる事で与えられる事が知られている。これはルート系における鏡映変換の圏論化とみなされ、簡単な箝の操作により導来圏同値な多元環を構成するものである。

そこで n 無限表現型多元環を構成する方法として、APR 傾加群を用いる事が考えられる。実際にはそれを一般化した i -APR 傾加群を考え(ここで i は任意の $1 \leq i \leq n$ の自然数)その自己準同型環に対して考察をする。これによってより多くの多元環を新たに構成する事が可能になる。さらにそれらの高次前射影多元環に関しても調べる。

これらは共同研究者である山浦氏と行った。双方の距離は離れているためこの研究を進めるために、いくつかの研究集会の際に議論を行った。また緊密に連絡をとりながら、ときに直接会い議論をする事で研究を行っていった。

4. 研究成果

まず通常の前射影多元環の研究に関して得られた結果について述べる。相原氏との共同研究において Dynkin 型前射影多元環の傾複体の分類を行った。2 項傾複体はある Weyl 群と一一対応を持つ事がわかってい

た。そこでこの対応において鍵となる変異の作用を理解する事で、傾複体の場合へと拡張を行った。そして傾複体の変異と Braid 群の作用の可換性を示した。結果として傾複体と Braid 群との間に一一対応があるが導かれた。これによって基本的組み合わせ対象である Braid 群と、圏論における重要な対象である傾複体との結びつきを示した。

さらに任意の傾複体の自己準同型環はもとの環と同型になる事を示した。導来圏同値な多元環は傾複体の自己準同型環により与えられる事が知られている。それゆえ Dynkin 型前射影多元環に対して導来圏同値な多元環は自分自身のみであるという結論が得られた。

次に高次前射影多元環に対して得られた結果について述べる。まず n 無限表現型多元環に対して、 i -APR 傾加群の自己準同型環は再び n 無限表現型多元環になることが分かった。これは n 有限表現型多元環の場合には一般に成り立たない事で、そのときより遙かに多くの例が構成できる事が明らかになった。そしてこのようにして得られた多元環は互いに導来圏同値になる事が導かれる。さらにそれらの高次前射影多元環についても性質を調べた。

そして n 無限表現型多元環上の i -APR 傾加群に対してテンソル代数を作用させる事で、その高次前射影多元環上の傾加群が構成出来るを示した。さらにこの傾加群の自己準同型多元環は、 i -APR 傾加群の自己準同型多元環からテンソル代数として得られた高次前射影多元環と一致する事を示した。結果として、それらも互いに導来圏同値になることがわかった。さらに系として先行研究の結果と合わせる事で特に n が 2 の場合には、その多元環の具体的な箝と関係式を変異を用いる事で明確に与えられる事が分かった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

1. Y. Mizuno and K. Yamaura, Higher APR tilting preserves n -representation infiniteness, Journal of Algebra, 査読有, 447 (2016) pp. 56-73.

2. Y. Mizuno, Higher APR tilting preserve n -representation infiniteness, Proceedings of the 48th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, 査読無, (2015) pp. 96-102.

3. T. Aihara and Y. Mizuno,

様式 C - 19、F - 19、Z - 19 (共通)

Tilting complexes over preprojective algebras of Dynkin type, Proceedings of the 47th symposium on Ring Theory and Representation Theory, 査読無, (2014) pp.14-19.

[学会発表](計9件)

1 . Y.Mizuno,

Representation theory of preprojective algebras, On Winter School 2016, 2016年1月8-12日, 東京大学.

2 . Y.Mizuno,

Categorification of Weyl groups and braid groups, 組合せ論的表現論とその周辺, 2015年10月19-22日, 京都大学.

3 . Y.Mizuno,

Preprojective algebras of Dynkin type, tilting theory and Weyl group, 2015年日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月13-16日, 京都産業大学.

4 . Y.Mizuno,

Classifying tilting complexes over preprojective algebras of Dynkin type, Derived categories of finite dimensional algebras, 2015年9月11日-12日, 静岡大学.

5 . Y.Mizuno,

Higher APR tilting preserve n-representation infiniteness, 第48回環論および表現論シンポジウム, 2015年9月7日-10日, 名古屋大学.

6 . Y.Mizuno,

Auslander-Reiten quivers, Introductory Seminar at Institut Mittag-Leffler, 2015年3月23日, Mittag-Leffler 研究所 (スウェーデン).

7 . Y.Mizuno,

Tilting complexes over preprojective algebras of Dynkin type, 第47回環論および表現論シンポジウム, 2014年9月13日-15日, 大阪市立大学.

8 . Y.Mizuno,

Preprojective algebras and τ -tilting theory, The 16th International Conference on Representations of Algebras and Workshop, 2014年8月20日-29日, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum (中国).

9 . Y.Mizuno,

τ -tilting modules over preprojective

algebras, The third Advances in Representation Theory of Algebras, 2014年6月16日-20日, Universite du Quebec a Montreal (カナダ).

6 . 研究組織

(1)研究代表者

水野有哉 (MIZUNO YUYA)

名古屋大学・多元数理科学研究科・特任助教

研究者番号 : 30726352