様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２５ 日現在

機関番号：１６３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８０００１１

研究課題名（和文）岩澤理論の精密化とその応用

研究課題名（英文）Refinement of Iwasawa theory and its applications

研究代表者
大下　達也（Ohshita, Tatsuya）

愛媛大学・理工学研究科（理学系）・助教

研究者番号：７０７１２４２０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：岩澤理論は、「代数体のイデアル類群」や「Galois表現のSelmer群」のような代数的な対象と、「ゼータ関数の特殊値」のような解析的な対象の間に横たわる関係を研究する整数論の一分野である。岩澤理論に於いて、Euler系と呼ばれるGaloisコホモロジー類の系列がしばしば代数的対象と解析的対象を結ぶ架け橋の役割を果たす。
本研究では、Euler系を用いて代数的対象に関する（従来の研究と比較して）より精度の高い情報を記述する理論を構築することで岩澤理論を精密化を図った。特に、適切な条件を満たすGalois変形の双対精Selmer群の擬同型類が「良いEuler系」を用いて決定できることを証明した。

研究成果の概要（英文）：Roughly speaking, Iwasawa theory is a research area of number theory which studies mysterious relationships between algebraic objects, like ideal class groups, and analytic objects, like special values of zeta functions, lying in the p-adic world (for a fixed prime number p). In Iwasawa theory, systems of Galois cohomology classes called "Euler systems" play roles as bridges between algebraic objects and analytic ones.
In our work, in order to obtain refinements of Iwasawa theory, we have tried to construct a theory which describes finer information on algebraic objects by using Euler systems. By our investigation, in particular, by using Kolyvagin derivatives of rank one Euler systems of Rubin type (satisfying certain good conditions) for a given Galois deformation, we have constructed certain ideals of the deformation ring which determine the pseudo-isomorphism class of the dual fine Selmer group of the Galois deformation.

研究分野：整数論

キーワード：岩澤理論　Euler系　Galois変形　高次Fittingイデアル

１．研究開始当初の背景

岩澤理論は，「イデアル類群や楕円曲線の Selmer 群等のような代数的な数論的対象(ここではこれらを纏めて “数論的加群”と呼ぶ）の“p 進的な族”の挙動」と「L 関数の特殊値」（解析的対象)を（固定された素数ｐに関する）「p 進の世界」で結び付ける理論である．岩澤理論の中でも特に，岩澤主予想は，岩澤加群（数論的加群の族に沿った極限）の特性イデアル と呼ばれる不変量を，L 関数の p 進類似である p 進 L 関数によって記述することを試みる，重要な問題である．(岩澤主予想が定式化・証明されているかどうかは，数論的加群ごとに異なる．)岩澤主予想で記述される特性イデアルは，岩澤加群の構造に関する重要な情報を握る不変量ではあるものの,「岩澤加群の生成元の個数を決定することが出来ない」,「岩澤加群の擬同型類を決定できない」など，不十分な点も多い．岩澤理論を数論的加群の詳細な構造の研究に応用するためには，特性イデアルよりも深い情報を扱えるように岩澤理論を精密化する必要がある．

２．研究の目的

「岩澤加群の生成元の個数」や「岩澤加群の擬同型類」は，特性イデアルよりも深い情報を持つ，高次 Fitting イデアルと呼ばれる不変量を用いることで決定できる．本研究の目的は，岩澤加群の高次 Fitting イデアルを記述する理論を構築して，岩澤主予想を精密化することである．

３．研究の方法

岩澤理論ではしばしば，Euler 系と呼ばれる Galois コホモロジー類の系列が代数的対象と解析的対象の間を結ぶ架け橋の役割を果たす．本研究では，種々の代数的対象の高次 Fitting イデアルを Euler 系（より正確には Euler 系から定まる，Kolyvagin 導分と呼ばれる Galois コホモロジー類）を用いて記述する統一的な理論の構築を試みることで，研究目的の達成を目指した．本研究を遂行する上で，栗原将人氏による「Gauss 和型の Euler 系」に関する先行研究や，Mazur 氏と Rubin 氏による Kolyvagin 系の理論，落合理氏による Galois 変形の Euler 系の理論が重要な手掛かりとなった．

４．研究成果

本研究の成果として得られた，下記の(1)-(4)をそれぞれ，論文にまとめてジャーナルに投稿した．(いずれも，現在査読中である.）

(1) 本研究実施以前に，筆者（大下達也）は既に，楕円単数の Euler 系の Kolyvagin 導分を用いて，虚二次体上の１変数および２変数の不分岐岩澤加群の高次 Fitting イデアルの上界となるイデアル C_{i,ell}を構成していた．本研究では，この結果を精密化して，イデアル C_{i,ell}が「不分岐岩澤加群の擬同型類決定することが出来るほどの精度」で高次 Fitting イデアルを近似できていることを示した．更に，同変玉河数予想が証明されている状況下では，Burns 氏，栗原将人氏，佐野昂迪氏による Rubin-Stark 元に関する研究結果との比較を行うことで，C_{i,ell}が高次 Fitting イデアルと一致することを示した．

(2) 円分 Z_p 拡大に関する Galois 表現の岩澤理論，及びより一般の Galois 変形の岩澤理論の精密化に関する研究を行った．この研究では､Galois 表現及び Galois 変形の Rubin 型の１階 Euler 系から得られる Kolyvagin 導分を用いて（「代数側 」の対象である Selmer 群に対して）「解析側」の対象といえるイデアルを構成して，このイデアルと Selmer 群の高次 Fitting イデアル の比較を行った．特に，（適切な条件のもとで）下記の結果を得た．

(A) 岩澤主予想を仮定する.１変数の場合（と「1 変数の円分変形」という，2 変数の場合の特別な場合）には，擬同型類を決定できる精度で､「解析側」のイデアルが Selmer 群の高次 Fitting イデアルを近似できていることを示した．

(B) 多変数の場合も，解析側のイデアルが Selmer 群の高次 Fitting イデアルの上界を与えることを示すという成果が得られた．

(3) Dedekind 環上整な１次元整閉整域 R のイデアル半群が､「R の極大スペクトラムに適切な位相を入れた位相空間上のある全順序モノイドに値をとり，適切な条件を満たす上半連続関数全体のなすモノイド」と同型になることを示した．

(4) 代数曲線の線型（対称）行列式表示を求めるアルゴリズムを開発し，それを用いて 4 次 Fermat 曲線および Klein の 4 次曲線の線型（対称）行列式表示を分類した。これに関連して，4 次 Fermat 曲線の Jacobi 様体の定める法 4 Galois 表現の明示的な表示を与えた．本研究は伊藤哲史氏（京都大学)，石塚裕大氏（京都大学）との共同研究である．

また，上記の成果以外にも，原隆氏と「非可換岩澤加群の高次 Fitting イデアルの研究」を行った．この研究では特に，Kakde 氏や，Ritter 氏と Weiss 氏により証明された総実代数体の非可換岩澤主予想を精密化する上で「適切な」(Rubin-Stark 元の理論等を用いて議論する際に扱いやすく，さらに岩澤加群の構造に関して十分に豊富な情報を含んでいるような)「高次 Fitting イデアルの理論」を整備した．

（この研究については，すでにある程度の成果は得られているものの，現時点ではまだ論文の形にまとめることは出来ていない.）

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

[1] 大下 達也
非可換岩澤主予想の証明―解析的な部分について
第 22 回整数論サマースクール『非可換岩澤理論』報告集
査読無、I 巻、2016 、401-482

〔学会発表〕（計 10 件）

[1] 平面 4 次曲線の線形行列式表示を計算するアルゴリズムについて
大下 達也
日本応用数理学会 2018 年研究部会連合発表会 「数論アルゴリズムとその応用」(JANT) セッション　2018 年 3 月 16 日

[2] 幾何的佐武同値について
大下 達也
倉敷整数論集会　2016 年 7 月 22 日

[3] Galois 変形の Euler 系と双対精 Selmer 群の擬同型類について
大下 達也
神戸大学代数セミナー 2016 年 6 月 8 日

[4] アーベル多様体の周期への応用
大下 達也
2015 年度整数論サマースクール 「志村多様体とその応用」　2015 年 8 月 20 日

[5] torsion コホモロジーの位数に関する予想
大下 達也
倉敷整数論集会　2015 年 8 月 2 日

[6] Galois 変形の Euler 系と双対精 Selmer 群の擬同型類について
大下 達也
香川セミナー　2015 年 5 月 23 日

[7] Euler systems for Galois deformations and pseudo-isomorphism classes of the dual fine Selmer groups
大下 達也
早稲田整数論研究集会　2015 年 3 月

[8] Galois 表現の Euler 系と Selmer 群について
大下 達也
北陸数論研究集会 2014「代数体の単数」 2014 年 12 月 25 日

[9] Euler systems for Galois deformations and higher Fitting ideals of the dual fine Selmer groups
大下 達也
京都大学数論合同セミナー　2014 年 11 月 14 日

[10] 非可換岩澤主予想の証明--解析的側面について
大下 達也
第 22 回（2014 年度）整数論サマースクール『非可換岩澤理論』　2014 年 8 月 30 日

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者
大下 達也（OHSHITA, Tatsuya）
愛媛大学・大学院理工学研究科・助教
研究者番号： 70712420

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者

(　　　)