2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２２ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８０００１２
研究課題名（和文）非アルキメデス的幾何の研究と代数多様体の算術への応用

研究課題名（英文）Nonarchimedean geometry and its application to arithmetic of algebraic varieties

研究代表者
山木　壱彦（Yamaki, Kazuhiko）

京都大学・国際高等教育院・准教授

研究者番号：８０４０２９７３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：主な研究成果は二つある．一つは，幾何的ボゴモロフ予想に関するものであり，もう一つはベルコビッチ空間のトロピカル化に関するものである．
幾何的ボゴモロフ予想とは，幾つかの多項式系の共通零点のうち「算術的複雑度」の低いものの分布に関する予想であり，1980年頃にボゴモロフによって提唱された．研究代表者は，この予想に関する重要な解答を与えた．
ベルコビッチ空間のトロピカル化とは，幾つかのべき級数の共通零点の集合を線型不等式で近似的に記述することである．川口周氏との共同研究において，このような記述がもとの共通零点集合を十分良く近似するための非自明な十分条件を確立した．

研究成果の概要（英文）：There are two main research results. One concerns the geometric Bogomolov conjecture, and the other concerns tropicalizations of Berkovich spaces.
The geometric Bogomolov conjecture is a conjecture about the distribution of small arithmetic complexity among common zeros of several polynomials and was proposed by Bogomolov around 1980. As research results, I proved important result on this conjecture.
Tropicalizations of Berkovich spaces approximately describe the set of common zeros of several power series in terms of linear inequalities. I established, with Shu Kawaguchi, a nontrivial sufficient condition for such descriptions to sufficiently well approximate the original common zeros.

研究分野：代数幾何

キーワード：幾何的ボゴモロフ予想　ボゴモロフ予想　高さ　非アルキメデス的幾何　ベルコビッチ空間　トロピカル幾何

１．研究開始当初の背景

本研究課題は，非アルキメデス的幾何を研究しそれを代数多様体の算術問題に応用することである．これらがどういう関係にあるのか，その背景について具体的問題を通して概観しておく．特に，幾何的ボゴモロフ予想の更なる進展は本研究の目的の一つであるので，この予想について少々詳しく記述する．

大域体 K 上の代数多様体の算術的構造を研究する一分野はディオファントス幾何と呼ばれる．この分野では，同種の問題を代数体上（代数体版）と関数体上（関数体版）とで平行して考察されることがしばしばあるが，シャファレビッチ予想やモーデル予想（K 有理点の有限性問題に関する主張で，現在では Faltings の定理）で代表されるように，一般には代数体版の方が難しい．

このような事情の背景は，関数体版の方が（そのモデルにおいて）交叉理論等の幾何的概念や技術が古くから良く知られており，その活用が有効に働くことにある．そこで，アラケロフ幾何は古典的な交叉理論の類似を整数環上の射影スキームにおいて模索することで発展してきた．そして，アラケロフ幾何の重要性は，Faltings が最初に上記二つの予想を解決したときの証明にも見ることができる．

以降もアラケロフ幾何は発展し，ディオファントス問題においていくつかの本質的な応用がなされている．その中での重要な成功例は，Zhang によるアーベル多様体に対する（算術的）ボゴモロフ予想の解決である．K 上の多様体 Z に対するボゴモロフ予想とは，「Z の閉部分多様体 X で，その K 点集合 X(K) 内の高さの小さい点（算術的複雑さの少ない点）が X で稠密に分布するようなものは，『特殊な』X に限る」という型の主張である．Zhang の証明では，アラケロフ幾何の応用として得られる「同程度分布の定理」が中心的な役割を果たした．それは，高さの小さい点が X で十分一般の位置に配置されていれば，X をアルキメデス的素点を通して複素解析空間と見做したその上の「標準測度」に関し，その小さい点たちは一様に分布する，ということを主張する定理である．代数的点の分布の記述という算術的問題が測度論的な意味での点の分布問題と結びつき，結果が得られたのである．

一方，この予想の関数体版（アーベル多様体に対する幾何的ボゴモロフ予想）は現在でも未解決である．一般に「関数体版は代数体版より易しい」と言われる中、逆転現象が起きているのだ．証明の中にその理由を指摘するならば，代数体版でなされた「アルキメデス的素点で局所化することによって多様体を複素解析空間とみなす」ということが，アルキメデス的素点を持たない関数体の場合には不可能で，そのため測度論的取り扱いを行う舞台が自明には与えられていない点が挙げられる．

その困難を克服するため，近年代替物として非アルキメデス的素点上のベルコビッチ空間やトロピカル多様体とその上の Chamber-Loir 測度が利用され，同程度分布の定理など測度論的取り扱いが可能な状況は整備された．実際これは成果を挙げ，アーベル多様体の様々なクラスに対し幾何的ボゴモロフ予想が成立することが証明された．Gubler は，関数体上のアーベル多様体 A が総退化となる素点を持つ場合が扱い，その後，本課題研究者によって，総退化な素点を持つとは限らない場合にも一般化された．非アルキメデス的素点の上での測度論的取り扱いが，算術的問題へ応用され成功した例である．

このような状況を前にして，当該研究代表者は算術的問題を念頭において非アルキメデス的幾何を研究することの重要性を認識し，この方向での研究を発展させる本研究課題の着想に至った．

２．研究の目的

本研究課題の研究目的は，主に二つに分けられた．

（１）先にも述べたとおり，退化を持つアーベル多様体に対する幾何的ボゴモロフ予想はある程度解明されてきたが，退化を持たないものについては未解決のままである．本研究期間においてはこの解決を目的とした．

アーベル多様体に退化が無いと，同程度分布の定理を用いた証明はうまく行かない．原因は対応するベルコビッチ空間上の標準測度が貧弱となってしまうことにあり，これはアルキメデス‐非アルキメデスの間の相違の現れである．この困難を克服し本予想を解決すれば，解決自体も意義深いがさらにそこでの考察を通して両者の何か本質的な相違を浮かび上がらせるという意義が期待される．

（２）トロピカル多様体において線形系や交叉数の基礎理論を整備し，これらについて代数幾何とトロピカル幾何との間における相違や類似について研究することを目的とした．

この研究では両者の類似と相違の両方に迫ることになる．トロピカル多様体は非アルキメデス的幾何における重要な対象である．古典的代数幾何とトロピカル幾何との間では，一次元の場合には比較的類似の理論が整備されているが，その中身には相違もあり，そのことは，川口周氏との共同研究でも考察されていた．両者の類似と相違が観察される現象はまだ多くあり，その理解は非アルキメデス的幾何の研究において重要な視点を与える．また，二次元以上となるとトロピカル側にどれ程類似の理論があるのかは未知であり，その探求を通して非アルキメデス的幾何の生態が理解される．

なお，複素幾何において微分幾何的手法は重要な位置を占める．そこで，非アルキメデス的幾何においても「微分幾何的手法」を整

備することも目的である．

３．研究の方法

幾何的ボゴモロフ予想についての研究の遂行にあって，第一段階として，問題を函数体の基礎体上定義された部分アーベル多様体の影響と捩れ部分多様体のよる影響の二つに適切に切り分けた．その後，考えているアーベル多様体の部分多様体が曲線または因子の場合について，捩れ部分多様体による影響のついて深い考察を行い，研究を進展させた．

この方法で研究を遂行するにあたって，国外出張をおこない他の研究者との情報交換を行うことは重要な活動であった．たとえば，当該研究期間中に Regensburg 他にて Gubler 氏と研究上の議論を行ったが，この機会は極めて当該研究において重要であった．

トロピカル幾何の研究については，まずは線形系を通した曲線の研究を切り口として遂行した．その具体例の計算を通して，曲線の線形系の特性を理解するということが，最初にとった方法であった．

この方法を遂行するにあたっても，国外の研究者との議論が重要な推進力となった．特に，当該研究機関中に Baker 氏，Payne 氏と議論を通して情報交換を行い，それによって研究の進化がなされた．

非アルキメデス的幾何，特にベルコビッチ空間の研究においては，その骨格を通して空間を観察する方法によって研究を行った．骨格を用いた研究においては，「忠実トロピカル化」が重要な話題となる．そこで，当該研究においては，その先行研究である Gubler-Rabinoff-Werner の論文を精査し，そのより精密な結果を模索することによって研究を推進した．

この研究を遂行するにあたっても，国外出張を利用して Gubler 氏，Werner 氏，Rabinoff 氏等と議論を行い，研究を効果的に進展させた．

４．研究成果

（１）幾何的ボゴモロフ予想に関して．幾何的ボゴモロフ予想については、大きなものとして二つの成果が上がった．一つは，アーベル多様体に対する幾何的ボゴモロフ予想は，退化を持たないアーベル多様体に対するそれに還元できることを示した定理で，下記雑誌論文[6]で公開された．もう一つは，アーベル多様体の閉部分多様体の次元または余次元が１のときに，その閉部分多様体が稠密に小点を持つならばそれは特殊部分多様体であるという定理で，下記雑誌論文[4]で公開された．後者の定理は，ボゴモロフが元々提唱していた「（函数体上の）曲線に対するボゴモロフ予想」の解決をその系として含む．

その他，幾何的ボゴモロフ予想に関する成果としては，雑誌論文[2,3]の成果が上げられる．

（２）トロピカル幾何および非アルキメデス的幾何に関して．主なものは二つある．

一つは，グラフの因子理論と代数曲線の因子理論の間の関係を調べた研究である．因子の階数がグラフのものと代数曲線のものでどのように対応するのかを，グラフと曲線の種数が 3 の場合に詳しく調べた．その結果は[5]で公表された．

もう一つは，ベルコビッチ空間のトロピカル化に関する研究である．非アルキメデス的付値体上の射影多様体とその上の適当な直線束が与えられたとき，その大域切断を用いて付随したベルコビッチ空間からトロピカル射影空間への連続写像を構成することができる．この写像を，（直線束の大域切断に付随した）トロピカル化写像と呼ぶ．さて，ベルコビッチ空間の中には，「骨格」と呼ばれる単体的複体が構成できる．ここで，次のような問題を考えることができる：射影多様体に付随したベルコビッチ空間の骨格が与えられたとき，トロピカル化写像で，骨格をトロピカル射影空間の閉部分空間として埋め込みかつ整構造も保つものが存在するか？このようなトロピカル化を「（与えられた骨格の）忠実なトロピカル化」と呼ぶ．

当該研究課題において，与えられた骨格に対しその忠実なトロピカル化が存在するための，直線束に関する十分条件を研究した．その成果は[1]で公表された．また，考えている多様体が滑らかな曲線の場合には，直線束の次数のみで与えられる重文条件を確立した．この曲線の場合については，川口周氏と共同で書いた論文 Effective faithful tropicalizations associated to linear systems on curves にまとめた．この論文は，Memoirs of the American mathematical society から出版されることが確定している．

前段の最後に述べた曲線の場合のトロピカル化では，忠実なトロピカル化が得られるための十分条件として直線束の次数のしたからの評価を証明した．この結果は，Payne による「ベルコビッチ空間はトロピカル化の極限で表せる」という定理について，当初は想定していなかった知見を与えた．Payne のこの結果によれば，たとえばベルコビッチアフィン空間の閉部分多様体 X が与えられたとき，その勝手な骨格に対し，適当な有限個の多項式函数を用いでその骨格をトロピカルアフィン空間に埋め込むことができる．しかし，そこで必要となる多項式函数の次数としてどの程度大きいものが必要なのかということは良くわからなかった．上記の曲線の場合の忠実トロピカル化に関する論文では，適当な条件の下，X が曲線の場合に必要となる多項式の次数の上界を与えた．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　7　件）

[1] Shu Kawaguchi, Kazuhiko Yamaki, Effective Faithful Tropicalizations Associated to Adjoint Linear Systems, International Mathematics Research Notices (2018, online), DOI :10.1093/imrn/rnx302

[2] Kazuhiko Yamaki, Survey on the geometric Bogomolov conjecture. Actes de la Conférence "Non-Archimedean Analytic Geometry: Theory and Practice", 137–193, Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr., 2017/1. DOI: 10.5802/pmb.19

[3] Kazuhiko Yamaki, Geometric Bogomolov conjecture for nowhere degenerate abelian varieties of dimension 5 with_trivial trace, Math. Res. Lett. 24 (2017), no. 5, 1555–1563. DOI: 10.4310/MRL.2017.v24.n5.a10

[4] Kazuhiko Yamaki, Non-density of small points on divisors on abelian varieties and the Bogomolov conjecture. J. Amer. Math. Soc. 30 (2017), no. 4, 1133–1163. DOI: https://doi.org/10.1090/jams/874

[5] Shu Kawaguchi, Kazuhiko Yamaki, Algebraic rank on hyperelliptic graphs and graphs of genus 3. Kyoto J. Math. 56 (2016), no. 1, 177–196. DOI: 10.1215/21562261-3445192

[6] Kazuhiko Yamaki, Trace of abelian varieties over function fields and the geometric Bogomolov conjecture, Journal für die reine und angewandte Mathematik (2016, online), DOI: 10.1515/ crelle-2015-0086

〔学会発表〕（計　16　件）
[1] 山木 壱彦，代数多様体の非アルキメデス的解析幾何とトロピカル化，野田代数幾何学シンポジウム 2018，2018.

[2] Kazuhiko Yamaki, Effective faithful tropicalizations associated to adjoint linear systems, Workshop: Log geometry, degenerations and related topics, 2018.

[3] 山木 壱彦，直線束を使った忠実トロピカル化：次元が高い場合でも言えること，第５回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ，2017.

[4] Kazuhiko Yamaki, Strict supports of canonical measures and applications to the geometric Bogomolov conjecture, Arakelov Geometry and diophantine applications, 2017.

[5] 山木　壱彦，ベルコビッチ曲線の直線束に付随したトロピカル化，野田代数幾何学シンポジウム 2017，2017.

[6] 山木　壱彦，曲線上の直線束の次数と曲線束に付随した忠実トロピカル化，2016 城崎代数幾何学シンポジウム，2016.

[7] Kazuhiko Yamaki, Effective faithful tropicalizations associated to linear systems on curves, Tropical Geometry and Related Topics, 2016.

[8] Kazuhiko Yamaki, The geometric Bogomolov conjecture for curves, Arithmetic and Algebraic Geometry 2016, 2016.

[9] Kazuhiko Yamaki, Bogomolov conjecture for curves over any function field, Intercity Seminar on Arakelov Geometry, 2015.

[10] Kazuhiko Yamaki, Recent progress in the geometric Bogomolov conjecture, Non archimedean analytic Geometry: Theory and Practice, 2015.

[11] 山木　壱彦，函数体上の曲線に対するボゴモロフ予想，第３回 K3 曲面・エンリケス曲面ワークショップ，2015.

[12] Kazuhiko Yamaki, Recent Progress in the Geometric Bogomolov Conjecture, Higher Invariants, 2015.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等
京都大学 教育研究活動データベース
https://kyouindb.iimc.kyoto-u.ac.jp/j/jO6oW

６．研究組織
(1)研究代表者
山木壱彦（YAMAKI Kazuhiko）
京都大学・国際高等教育院・准教授
研究者番号：８０４０２９７３

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし