様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2016
課題番号：２６８００１８

研究課題名（和文）対称化に着目した多重ゼータ値の代数的構造の研究

研究課題名（英文）Research on the algebraic structure of multiple zeta values focused on symmetrisation

研究代表者

斎藤　新悟（Saito, Shingo）

九州大学・基幹教育院・准教授

研究者番号：４０５１５１９４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：正の整数の2乗の逆数の和を求める問題はバーゼル問題と呼ばれ，18世紀にオイラーによって解決された。オイラーはさらに2乗を一般の偶数乗に変えた場合の和も求めることに成功したが，奇数乗の和に関しては現在でも未知の部分が多い。このような和を多変数に拡張したものが多重ゼータ値である。多重ゼータ値はその間に数多くの関係式があるために，興味深い代数的構造を有する。本研究では多重ゼータ値の類似物であり，同じ関係式を満たすと予想されている対称多重ゼータ値・有限多重ゼータ値の関係式について考察を進めた。

研究成果の概要（英文）：The Basel problem asks for the value of the sum of the reciprocals of the squares of the positive integers. It was solved in the 18th century by Euler, who further succeeded in finding the sum with squares replaced by arbitrary even powers; for odd powers, however, little is known even by now. The multivariate generalisation of such sums is known as multiple zeta values. They have an interesting algebraic structure due to the many relations that exist among them. The research supported by this grant has focused on the relations among symmetric multiple zeta values and finite multiple zeta values, which are both analogues of multiple zeta values and conjectured to satisfy the same relations.

研究分野：多重ゼータ値

キーワード：多重ゼータ値

１．研究開始当初の背景

(1)

2以上の整数 k に対して，

$$\zeta(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k}$$

は Riemann ゼータ関数の特殊値と呼ばれる実数である。k が偶数のときに，この値が Bernoulli 数を用いて表される有理数と円周率の k 乗の積に等しいことは，18 世紀に Euler が見出して以来よく知られている。しかし，k が奇数のときはζ(3)の無理数性を示す Apéry の定理などいくつかの結果はあるものの，現在でも未知の部分が多く，例えばζ(3)が超越数であるかどうかは未解決である。

(2)

多重ゼータ値とは，Riemann ゼータ関数の特殊値を多変数化したものであり，正の整数 k_1, …, k_n（k_1≧2）に対して

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n \geqq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}$$

で定められる。多重ゼータ値は Euler 自身も研究を行っているが，1990 年代ごろから結び目理論や数理物理学など様々な分野とのつながりが指摘されて以来，多くの数学者が興味を持つようになり，活発に研究されている。多重ゼータ値に関係する論文が近年急増している様子は Hoffman がまとめている文献リスト
https://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html
を見ると分かりやすい。

(3)

Riemann ゼータ関数の特殊値の積を考えるとζ(2)^2=ζ(4)+2ζ(2,2) のように多重ゼータ値が現れる。多重ゼータ値はこれ以外にもζ(2,1)=ζ(3)に代表されるような数多くの関係式を持つことが知られている。実際，k_1+…+k_n=k であるような(k_1,…,k_n)の個数は 2^{k-2}個であるが，それらに対するζ(k_1,…,k_n)が張る Q 上の線形空間の次元は，d_0=1, d_1=0, d_2=1, d_k=d_{k-2}+d_{k-3}で定まる d_k に等しいことが予想されている。この d_k は 2^{k-2}よりはるかに小さく，また次元がこの d_k 以下であることは Terasoma, Goncharov らによって示されている。しかし，多重ゼータ値が具体的にどのような関係式を満たすかについては，多くの研究がなされているもののまだ未解明の部分も残されている。多重ゼータ値の研究の１つの大きな目標は，多重ゼータ値のなす Q 代数の代数的構造を解明することである。

(4)

本研究では，多重ゼータ値の類似物である対称多重ゼータ値と有限多重ゼータ値に着目する。
対称多重ゼータ値は，引数(k_1,…,k_n)を 2 つに分割して片方を逆順にすることで得られる 2 つの多重ゼータ値ζ(k_i,…,k_1), ζ(k_{i+1},…,k_n)の積を考え，この積に適切に符号を付けて i=0,…,n に対して和を取って mod ζ(2) したものとして定義される (Kaneko, Zagier)。
また，有限多重ゼータ値は，多重ゼータ値の定義で和の範囲を素数 p 未満に限定したものを p に関して並べ, 有限個の p を除いて mod p で等しいものを同一視したものである。素数 p を固定して有限和の mod p での値に関する研究は今までにもあったが，有限個の p を除くというアイデアを定式化することで Q 代数における対象と捉えられるというのは Zagier のアイデアである。
対称多重ゼータ値・有限多重ゼータ値はこのように全く異なる定義を持ち，一見両者の間には特に関係がないように思える。しかし，Kaneko, Zagier は，対称多重ゼータ値と有限多重ゼータ値のなす代数が同型である，すなわち両者は全く同じ関係式を満たすという驚くべき予想が 2013 年に提唱された。
また，対称多重ゼータ値・有限多重ゼータ値は多重ゼータ値とも同様の関係式を満たすという現象がしばしば観察される。しかし，全く同じ関係式を満たすわけではなく微妙な相違点があり，その相違点の解明も重要な研究課題である。

２．研究の目的

本研究の目的は，対称多重ゼータ値，有限多重ゼータ値の関係式を考察することで，両者の代数的構造を調べ，なぜ両者が同じ関係式を満たすかを考察し，それをもとに多重ゼータ値の代数的構造の解析も進めることである。

３．研究の方法

(1)

多重ゼータ値の関係式のうち，最も簡明なものの 1 つが双対性と呼ばれる関係式である。双対性は簡明であるために使いやすい一方で，他の関係式との包含関係が不明な場合がしばしばあり，多重ゼータ値の代数的構造を調べる際には鍵になる関係式であるといえる。
対称多重ゼータ値・有限多重ゼータ値にも同様の関係式が成立するが，多重ゼータ値の場合とは異なり，定義式の和に現れる不等号を等号付き不等号に変えたものに対して成り立つ。研究開始当初は，双対性は有限多重ゼータ値に対してのみ証明されていたため，対称多重ゼータ値に対しての証明を試みた（対称多重ゼータ値に対する双対性は，後に Jarossay によって証明された)。

(2)
多重ゼータ値の関係式族には様々なものがあるが，その中でもすべての関係式を生成すると予想されている関係式として正規化複シャッフル関係式，アソシエータ関係式，川島関係式がある（近年，Kaneko, Yamamoto によって積分級数関係式と呼ばれる新たな関係式が証明され，この関係式が正規化複シャッフル関係式と同値であることが証明された。したがって，積分級数関係式もすべての関係式を生成すると予想されている)。
研究開始当初は，対称多重ゼータ値・有限多重ゼータ値に対しては，このようなすべての関係式を生成すると予想されている関係式は存在しなかったため，そのような関係式を探求した（後に Kaneko, Zagier によって，多重ゼータ値の複シャッフル関係式に似た関係式が証明され，すべての関係式を生成すると予想されている)。

(3)
すでに証明した有限多重ゼータの和公式・Bowman-Bradley 型の定理（立命館大学の若林徳子氏との共同研究）で用いた手法をもとにして，対称多重ゼータ値・有限多重ゼータ値の様々な関係式を考察する。

４．研究成果

(1)
若林徳子氏と共同で証明した有限多重ゼータ値の和公式に関する論文(Sum formula for finite multiple zeta values)，および Bowman-Bradley 型の定理に関する論文(Bowman-Bradley type theorem for finite multiple zeta values)を完成させた。前者は日本数学会の欧文誌である Journal of the Mathematical Society of Japan から出版され，後者は東北大学大学院理学研究科数学専攻が発行する Tohoku Mathematical Journal（東北数学雑誌）から出版された。

(2)
2013 年に京都大学数理解析研究所で開催された研究集会「多重ゼータ値の諸相」で行った講演(Relations among finite multiple zeta values)の講究録として，有限多重ゼータ値の数表の論文(Numerical tables of finite multiple zeta values)を完成させた。この論文は数理解析研究所講究録別冊から出版されることが決定している。
この論文は引数が小さい場合 ($k_1+\cdots+k_n$ が 8 以下の場合）の有限多重ゼータ値の値をまとめたものである。ここでまとめた表は，それ以降有限多重ゼータ値・対称多重ゼータ値の関係式を考察する際に頻繁に参照しており，新たな関係式を発見するのに大きな助けになっている。

(3)
(1)で述べた対称多重ゼータ値・有限多重ゼータ値の和公式，Bowman-Bradley 型の定理の類似の定理を共同研究で証明した。これらの結果は現在論文として執筆中である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① <u>Shingo Saito</u>, Numerical tables of finite multiple zeta values, 数理解析研究所講究録別冊，査読あり，掲載決定.
② <u>Shingo Saito</u> and Noriko Wakabayashi, Bowman-Bradley type theorem for finite multiple zeta values, Tohoku Mathematical Journal，査読あり，vol. 68, 2016, pp. 241-251, doi:10.2748/tmj/1466172771
③ <u>Shingo Saito</u> and Noriko Wakabayashi, Sum formula for finite multiple zeta values, Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読あり, vol. 67, 2015, pp. 1069-1076, doi:10.2969/jmsj/06731069

〔学会発表〕（計３件）

① <u>斎藤 新悟</u>, Bowman-Bradley type theorems for multiple zeta values and analogues, 80th KPPY Combinatorics Workshop, 2016 年 12 月 17 日，慶尚北道（韓国）
② <u>斎藤 新悟</u>, Combinatorial species, APU 多重ゼータ＆モジュラーセミナー，2016 年 5 月 28 日，立命館アジア太平洋大学（大分県・別府市）
③ <u>斎藤 新悟</u>, Relations among finite multiple zeta values, Zeta Functions of Several Variables and Applications, 2015 年 11 月 13 日，名古屋大学（愛知県・名古屋市）

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ
http://www.artsci.kyushu-u.ac.jp/~ssaito/

６．研究組織

(1)研究代表者
斎藤　新悟（SAITO, Shingo）

九州大学・基幹教育院・准教授
研究者番号：４０５１５１９４

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
該当なし

(4)研究協力者
該当なし