

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 7 日現在

機関番号：17201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800019

研究課題名(和文) ファノ多様体の双有理的森ファイバー構造の研究と有理性問題への応用

研究課題名(英文) Birational Mori fiber structures of Fano varieties and rationality problem

研究代表者

岡田 拓三 (Okada, Takuzo)

佐賀大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20547012

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：3次元ファノ重み付き余次元2完全交叉について、新たに21族に属するファノ多様体の双有理的森ファイバー構造を決定した。さらに、重み付き射影空間に余次元3として埋め込まれる3次元ファノ多様体で双有理剛性を有するものを分類した。これにより、重み付き射影空間に余次元3以下として埋め込まれる3次元ファノ多様体で双有理剛性を有するものの分類が完了した。その他、クライン単純群の作用する3次元デルペッツォ束の非有理性や種々の双有理剛性を有する3次元ファノ多様体のK安定性に関する結果を得た。

研究成果の概要(英文)：We determined the birational Mori fiber structures of members of 21 families of 3 dimensional Fano weighted complete intersections of codimension 2. Moreover we classified birationally rigid Fano threefolds embedded as a codimension 3 subvariety in a weighted projective space. As a consequence, the classification of birationally rigid Fano threefolds which are embedded as a codimension at most 3 subvariety in a weighted projective space is completed. We also proved the non-rationality of some 3-dimensional del Pezzo fibrations admitting an action of the Klein simple group, and proved K-stability of various birationally rigid Fano threefolds.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ファノ多様体 del Pezzo束 コニック束 有理性問題

1. 研究開始当初の背景

代数多様体の双有理同値類を分類することは、代数幾何学、特に双有理幾何学における究極的な目標の一つと言える。その基本的枠組みとして極小モデル理論が構築されている。極小モデル理論により、3次元代数多様体は、極小モデルあるいは森ファイバー空間と双有理同値になる。

有理性問題とは、与えられた代数多様体が有理的 (= 射影空間と双有理同値) か否かを判定する問題のことであり、代数多様体の双有理分類における基本問題に位置付けられる。申請者の研究対象であるファノ多様体や有理多様体を含むものとして、有理連結多様体と呼ばれるクラスがある。それらは(極小モデルとは双有理同値にはならず)森ファイバー空間と双有理同値になる。有理連結多様体 X が与えられた時、 X と双有理同値になる森ファイバー空間のことを X の双有理的森ファイバー構造という。一般に X の双有理的森ファイバー構造は無限に存在し得る。

ファノ多様体の双有理的森ファイバー構造全体を不変量と見做す事により、有理性判定が可能であることが Iskovskikh および Manin により提唱・実践された。ファノ多様体が双有理的森ファイバー構造を唯一つ(丁度2つ、または高々有限個)しか持たないときに、その多様体は双有理剛性(双有理双剛性、または双有理準剛性)を有する、という。双有理剛性、双有理双剛性、双有理準剛性はいずれも非有理性を導く。Iskovskikh, Manin は非特異3次元4次超曲面が双有理剛性を有することを示し、それらの多様体が有理的でないことが導かれた。Corti, Pukhlikov, Reid は、95 属からなる反標準埋め込みの3次元ファノ重み付き超曲面を研究し、それら各族の一般メンバーが双有理剛性を有することを示した。その後、Corti, Mella は特定の特異点を有する3次元4次超曲面を研究し、双有理双剛性を有する多様体の初めての例を与えた。

このような背景の下、申請者は、85 族からなる反標準埋め込みの3次元ファノ重み付き余次元2完全交叉の研究を行なって来ており、本研究開始当初段階では、19 族に属する一般メンバーが双有理剛性を有すること、および14 族に属するメンバーが双有理剛性を有することを示している。

2. 研究の目的

上述の通り85族からなる3次元ファノ重み付き余次元2完全交叉のうち、未だ双有理的森ファイバー構造が解明されていない52族を対象とし、それらの双有理的森ファイバー構造の解明を目的とした研究を行う。また族における双有理的森ファイバー構造の個数の振る舞いにも興味を持っているため、その現象の解析も研究目的とする。

3. 研究の方法

前述の目的を達成するために、ファノ多様体の双有理的森ファイバー構造を決定するための既存の理論である「極大特異点の理論」を改良したものをを用いる。ファノ多様体は、森ファイバー空間への非正則な双有理写像を持てば、その写像を定義する線形系が一定程度高い重複度を持つ固定部分多様体(これを極大特異点、あるいは極大特異サイクルという)を持つ。このような極大特異サイクルの所在を特定し、付随する双有理写像を決定することが重要である。

4. 研究成果

以下のような結果が得られた。

- (ア) 3次元ファノ重み付き余次元2完全交叉について、新たに21族に属するファノ多様体の双有理双剛性を示した。
- (イ) 3次元ファノ多様体で双有理的森ファイバー構造が丁度3つのファノ多様体からなる例を構成した。
- (ウ) 重み付き射影空間に余次元3として埋め込まれる3次元ファノ多様体(パフィアンファノ多様体)で双有理剛性を有するものを分類した(H. Ahmadi nezhad 氏との共同研究)。
- (エ) クライン単純群が作用するいくつかの3次元デルペッツォ束の非有理性を示した。
- (オ) 3次元ファノ重み付き余次元2完全交叉、及び3次元パフィアンファノ多様体で双有理剛性を有するものの大域的対数標準域値(あるいはアルファ不変量)を計算し、それらが K 安定であること及びケラー・アインシュタイン計量を有することを示した(I.-K. Kim 氏, J. Won 氏との共同研究)。

成果(ア)は当初予定していたものである。完全な解決には至っていないが、未解明の残る族についても研究を進展させている。

成果(イ)で得られた例は、双有理的森ファイバー構造を丁度3つ持つ初めての例となる。また、この結果により双有理的森ファイバー構造の個数が族において上半連続的に振舞わないことがわかった。残りの成果については、研究開始当初には直接的に意図していないものである。

成果(ウ)は本研究課題の延長上のものであり、(ア)の研究における知見を活用することで成果を得られた。この結果により、重み付き射影空間に余次元3以下として埋め込まれたファノ多様体で双有理剛性を有するものの分類がなされた。

成果(エ)は、双有理的森ファイバー構造とは直接関連しないが、代数多様体の有理性問題に関する成果である。本結果は、クライン単純群の3次クレモナ群への埋め込みに関する研究と関連している。

成果(オ)は有理性問題とは関連しないが、

双有理剛性を有するファノ多様体はK安定であるという一般的な推測(予想)を具体例で持って検証している成果である.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

In-Kyun Kim, Joonyeong Won and Takuzo Okada, Alpha invariants of birationally rigid Fano three-folds, Int. Math. Res. Not., published online (2017), DOI:10.1093/imrn/rnw310, to appear in print.

Takuzo Okada, Birational Mori fiber structures of \mathbb{Q} -Fano 3-fold weighted complete intersections, II, J. Reine Angew. Math., published online (2015), DOI:10.1515/crelle-2015-0054, to appear in print.

Hamid Ahmadinezhad and Takuzo Okada, Birationally rigid Pfaffian Fano 3-folds, Algebr. Geom. **5** (2018), no. 2, 160-199.

Takuzo Okada, \mathbb{Q} -Fano 3-folds with three birational Mori fiber structures, Algebraic Varieties and Automorphism Groups, 393-424, Adv. Stud. Pure Math., **75**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017.

Takuzo Okada, Nonrational del Pezzo fibrations admitting an action of the Klein simple group, Eur. J. Math. **2** (2016), no. 1, 319-332.

Takuzo Okada, Birational Mori fiber structures of \mathbb{Q} -Fano 3-fold weighted complete intersections, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **109** (2014), no. 6, 1549-1600.

[学会発表](計18件)

Takuzo Okada, On birational rigidity of singular del Pezzo fibrations of degree 1, 第16回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学大阪梅田キャンパス, 2018年3月10日.

Takuzo Okada, On stable rationality problem of Fano varieties, Stability, Boundedness and Fano varieties, Beijin International Center for Mathematical Research, China, 2017年9月1日.

Takuzo Okada, Smooth weighted hypersurfaces that are not stably rational, Birkar's boundedness and Cremona groups (Edge days 2017), University of Edinburgh, UK, 2017年6月29日.

岡田拓三, Stable rationality of higher

dimensional conic bundles, 野田シンポジウム, 東京理科大学野田キャンパス, 2017年3月23日.

岡田拓三, Stable rationality of conic bundles over projective spaces, 農工大数学セミナー2017, 東京農工大学小金井キャンパス, 2017年3月22日.

Takuzo Okada, On stable rationality of del Pezzo fibrations, 第15回アフィン代数幾何学研究集会, 関西学院大学大阪梅田キャンパス, 2017年3月4日.

Takuzo Okada, Stable rationality of orbifold Fano 3-fold hypersurfaces, 城崎代数幾何学シンポジウム, 城崎アートセンター, 2016年10月18日.

Takuzo Okada, Stable rationality of orbifold Fano 3-fold hypersurfaces, Rationality and selfmaps, 数理解析研究所, 2016年7月21日.

Takuzo Okada, Stable rationality of cyclic covers and some orbifold Fano 3-folds, Workshop on birational geometry and reduction to positive characteristic, University of Edinburgh, UK, 2016年6月3日.

Takuzo Okada, Non-rationality of del Pezzo fibrations by reduction modulo p , Linfoot Seminar, University of Bristol, UK, 2016年2月17日.

Takuzo Okada, Birationally bi-rigid Fano threefolds of codimension 2, Heilbronn Focused Research Workshop on Birational Geometry, University of Warwick, UK, 2016年2月11日.

Takuzo Okada, Classification of birationally bi-rigid Fano 3-fold weighted complete intersections, Higher dimensional algebraic geometry and around, Kobe-Kyoto, Kyoto University, 2016年2月4日.

岡田拓三, Birationally rigid Pfaffian Fano 3-folds, 第3回杜の都代数幾何学研究集会, 福岡大学セミナーハウス, 2015年11月26日.

岡田拓三, 3次元ファノ多様体の双有理幾何について, 第133回日本数学会九州支部例会特別公演, 佐賀大学, 2015年10月24日.

Takuzo Okada, Birational geometry of Fano 3-folds of codimension 2 and 3, Algebraic Geometry Seminar, IBS Center for Geometry and Physics, Pohang, Korea, 2015年9月15日.

Takuzo Okada, Nonrational del Pezzo fibrations admitting an action of the Klein simple group, Workshop on singular del Pezzo surfaces (Edge days 2015), University of Edinburgh, UK, 2015年6月5日.

岡田拓三, 3次元Qファノ重み付き完全
交叉の双有理的森ファイバー構造につ
いて, 第12回代数曲線論シンポジウム,
日本大学理工学部, 2014年12月20日.
Takuzo Okada, Birational geometry of
Q-Fano 3-fold weighted complete
intersections, Landau-Ginzburg
theory and Fano varieties, Gyeongju
Korea, 2014年5月26日.

〔その他〕

ホームページ等

<http://research.dl.saga-u.ac.jp/profile/ja.34a5bac948a38cdb.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岡田 拓三 (OKADA, Takuzo)

佐賀大学・工学(系)研究科(研究院)・
准教授

研究者番号: 20547012

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号:

(4) 研究協力者

()