

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 24 日現在

機関番号：37112

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800026

研究課題名(和文) 多変数モジュラー形式の合同、 p 進的性質の研究研究課題名(英文) Study of congruences and p -adic properties for modular forms with several variables

研究代表者

菊田 俊幸 (Kikuta, Toshiyuki)

福岡工業大学・情報工学部・助教

研究者番号：60569953

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：素数などの整数論的な情報を多く含むゼータ関数(L関数)への応用を念頭に、Siegelモジュラー形式の合同や p 進的性質の研究を行ってきた。以前からの研究により、Serreによって示された重要な性質の一つの多変数化が成り立たない例を発見した。これらの例を「法 p 特異モジュラー形式」と名付け、詳しく調べてきた。特に法 p 特異モジュラー形式の重さが満たすべき条件や、「法 p 特異性」よりも緩い条件である「法 p テータ作用素の核」の重さが満たすべき条件などが明らかになった。応用として、Klingen型のEisenstein級数のFourier係数に現われるL関数の特殊値の p 因子に関する情報が得られた。

研究成果の概要(英文)：The reporter has been studied congruences and p -adic properties for modular forms of several variables, keeping in mind that he applies them to zeta functions (L-functions) which have many number theoretical information such as primes. In the previous study, the reporter found some examples of Siegel modular forms not satisfying the condition of several variables version of that in Serre's p -adic theory of modular forms of one variable. He named such the notions "mod p singular modular forms" and has studied it. As results of this study, he obtained some conditions which should be satisfied by the weights of mod p singular modular forms, and he also obtained the weight conditions for the "kernel of theta operator modulo p " which is a weaker version of the notion of "mod p singularity". As applications of these results, he got also some information of p -factor of special values of L-functions which appear in the Fourier coefficients of the Klingen type Eisenstein series.

研究分野：整数論、モジュラー形式

 キーワード：法 p 特異モジュラー形式 合同 p 進 Siegelモジュラー形式 Fourier係数 Ramanujan作用素 テータ作用素 Eisenstein級数

1. 研究開始当初の背景

Serre は 1973 年の論文において、代数的整数論への興味から、 p 進モジュラー形式の理論を確立した。この理論は、Katz、肥田、Wiles、Coleman などにより拡張され、今日、肥田理論と呼ばれる理論にまで発展している。

近年、報告者、Boecherer、長岡、竹森などにより、Serre が定義した p 進モジュラー形式の概念が多変数モジュラー形式 (Siegel モジュラー形式) の場合に拡張され、研究され始めていた。

(1) 本研究開始当初に投稿中であった報告者の論文により、Serre の結果の拡張を試み、思わぬ形で新しい概念を発見した。1 変数の場合には起こり得ない事象の発見であった。その性質をもつものを「法 p 特異モジュラー形式」と名付けた。この新しい概念から、2 次形式や、ある種の Eisenstein 級数の Fourier 係数に関する興味深い結果・応用例が多数得られた。しかしながら、定義されたばかりの「法 p 特異モジュラー形式」の様子は、ほとんど何も分かっていない状況であった。それらの性質を解明することが本研究の主要課題であった。

(2) モジュラー形式の合同に関する研究には、Fourier 係数の数値計算が有用となる場合が多い。いくつかの Fourier 係数の数値例を、そのままモジュラー形式の合同の証明に繋げることができれば、研究の効率はさらに向上する。その証明の役割を担う性質の 1 つに、以下の Sturm 型の境界が挙げられる。

Sturm 型の境界

「最初のいくつかの Fourier 係数が法 p で 0 なら、全ての Fourier 係数が法 p で 0 となるその境界」

次数 2 の偶数重さの Siegel モジュラー形式の場合における Sturm 型の境界は、報告者の D. Choi、Y. Choie との共同研究による結

果があった。未解決として残された場合について、その境界の具体的な値の解明や、これに類する様々なタイプの消滅条件の構築がもう 1 つの主要課題であった。

2. 研究の目的

(1) 法 p 特異モジュラー形式全体のなす空間の生成元、関係式などの具体的構造、テータ作用素 (ある種の微分作用素) との関連性の解明。

(2) 多変数モジュラー形式の場合における Sturm 型の境界の解明および、その他様々なタイプの消滅条件の構築。

3. 研究の方法

本研究全般において、Siegel の Φ 作用素、Witt 作用素、Fourier-Jacobi 展開、テータ展開などの様々な制限方法が主要道具となった。これらを用いて次数が低い場合など、既に良く分かっている場合に帰着させることが有用であった。

効率的な研究、新しい発見、現象の解明を目的に数式処理ソフトによる数値実験を行った。Siegel モジュラー形式に関わる計算には、研究協力者の竹森氏が開発した次数 2 の Siegel モジュラー形式の計算用パッケージソフトを用いた。

以上の研究では、Siegfried Boecherer 氏 (マンハイム大学)、兒玉浩尚氏 (工学院大学)、竹森翔氏 (マックスプランク研究所)、長岡昇勇氏 (近畿大学) による研究協力を受けた。

4. 研究成果

(1) 重さが素数 p に比し十分小さい場合に、法 p テータ作用素の核の元の重さが満たすべき性質が分かった。この結果の帰結として、Boecherer、Schulze-Pillot、長岡、竹森、兒玉などにより既に構成されていた具体例が、重さ最小のものであることが示された。

特に、報告者の研究成果(4)(後述)における素数 23 と重さ 35 の関連性の謎について、1 つの解答が得られたと言える。また膨大な量の数値例を計算することにより、 p が大きい場合には、上記性質が成り立たない例が存在することが分かった。それらを基に、重さに関する新たな予想を提唱することができた。

以上は Siegfried Boecherer 氏、竹森翔氏との共同研究による成果である。

(2) Hermite モジュラー形式の場合に、法 p テータ作用素の核の元および法 p 特異モジュラー形式の具体例を構成した。Eisenstein 級数とテータ級数を用いて、2 通りの例が得られた。

以上は長岡昇勇氏との共同研究による成果である。

(3) 本研究期間以前の研究より、Serre の結果の拡張が成り立たない Siegel モジュラー形式の例の存在を発見し、「法 p 特異モジュラー形式」と名付けていた。それらの重さは特別な合同式を満たさなければならないことが示されていた。さらに主結果を Klingen 型の Eisenstein 級数に応用し、Fourier 係数に現れる L 関数の特殊値の p 因子に関する情報が得られていた。これらの成果は論文としてまとめられ、学術雑誌に投稿されていた。本研究期間内に、修正指示が与えられ、対応した末に学術雑誌に掲載された。

以上は Siegfried Boecherer 氏との共同研究による成果である。

(4) 次数 2、重さ 35 の井草のカスプ形式が満たす奇妙な合同式を発見した。大雑把に述べれば、ほとんど全ての Fourier 係数が 23 で割り切れるという性質である。言い換えると、井草のカスプ形式が法 23 テータ作用素の核の元となる。証明は、井草のカスプ形式の青木-伊吹山による行列式表示を用いて得られ

る数値例と、Sturm 型の境界の応用による。証明は得られたものの、この結果は素数 23 と重さ 35 の関連性など、解明すべき謎を多く残すものであった。報告者、Boecherer、Schulze-Pillot、長岡、竹森、兒玉などによるその後の関連研究の先駆的研究となった。

以上は長岡昇勇氏、兒玉浩尚氏との共同研究による成果である。

(5) 次数 2 の偶数重さの Siegel モジュラー形式の場合に、法とする素数が 2、3 の Sturm 型の境界について考察し、成果が得られたように見られた(〔雑誌論文〕⑤)。しかしながら、竹森氏によって、その証明の議論中に間違いがあることが指摘された。その後、彼との共同研究により、元の議論とは全く異なる方法を用いて、証明を与え直すことができた。同時に奇数重さの場合について考察し、実際に成果が得られた。この場合にはさらに、境界の最良性についても言及した。これらの成果は論文としてまとめられ、現在は学術雑誌に投稿中である。

以上は竹森翔氏との共同研究による成果である。

(6) Siegel モジュラー形式の場合に、法 p カスプ形式が本当の意味でのカスプ形式と合同になることを示した。応用として、Klingen 型の Eisenstein 級数とカスプ形式が合同になるための素数 p に関する規準が得られた。実際に合同となる Klingen 型の Eisenstein 級数とカスプ形式の例を、数値計算により多数構成した。

以上は竹森翔氏との共同研究による成果である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Siegfried Boecherer, Toshiyuki Kikuta, Sho Takemori, 査読有, *Weights of the mod p kernels of theta operators*, *Canad. J. Math.* 70 (2018), no. 2, 241-264.
<http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2017-014-0>
- ② Toshiyuki Kikuta, Shoyu Nagaoka, 査読有, *On the theta operator for Hermitian modular forms of degree 2*, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* 87 (2017), no. 1, 145-163.
<https://doi.org/10.1007/s12188-016-0141-6>
- ③ Siegfried Boecherer, Toshiyuki Kikuta, 査読有, *On mod p singular modular forms*, *Forum Math.* 28 (2016), no. 6, 1051-1065.
<https://doi.org/10.1515/forum-2015-0062>
- ④ Toshiyuki Kikuta, Hirotaka Kodama, Shoyu Nagaoka, 査読有, *Note on Igusa's cusp form of weight 35*, *Rocky Mountain J. Math.* 45 (2015), no. 3, 963-972.
[doi:10.1216/RMJ-2015-45-3-963](https://doi.org/10.1216/RMJ-2015-45-3-963)
- ⑤ Toshiyuki Kikuta, 査読有, *Remark on Sturm bounds for Siegel modular forms of degree 2*, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 91 (2015), no. 6, 82-84.
[doi:10.3792/pjaa.91.82](https://doi.org/10.3792/pjaa.91.82)
- ⑥ Toshiyuki Kikuta, Sho Takemori, 査読有, *Ramanujan type congruences for the Klingen-Eisenstein series*, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* 84 (2014), no. 2,

257-266.

<https://doi.org/10.1007/s12188-014-0098-2>

[学会発表] (計 3 件)

- ① 菊田俊幸, *Weights of the mod p kernels of theta operators*, マンハイム大学数学講演会、マンハイム大学、2017 年 12 月
- ② 菊田俊幸, *Weights of the mod p kernels of theta operators*, アーヘン工科大学数学談話会、アーヘン工科大学、2017 年 12 月
- ③ 菊田俊幸, *Siegel モジュラー形式の場合における Ramanujan 型の合同*, Interdisciplinary Seminar、近畿大学、2014 年 10 月

[その他]

ホームページ等

<http://kikuta.yohamanzokuja.com/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

菊田俊幸 (KIKUTA Toshiyuki)
福岡工業大学・情報工学部・助教
研究者番号: 60569953

(2) 研究分担者 なし

研究者番号:

(3) 連携研究者 なし

研究者番号:

(4) 研究協力者

Siegfried Boecherer
兒玉浩尚 (KODAMA Hirotaka)
竹森翔 (TAKEMORI Sho)
長岡昇勇 (NAGAOKA Shoyu)