

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：11301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800029

研究課題名(和文) 離散群とグラフの境界の離散幾何解析学

研究課題名(英文) Discrete geometric analysis on boundaries of graphs and groups

研究代表者

田中 亮吉 (Tanaka, Ryokichi)

東北大学・理学研究科・助教

研究者番号：80629759

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：離散的な対象の幾何学は、数学以外の自然科学における関連性から、その発展が期待されている。本研究は、数学の内部における問題意識に焦点をあて、関連分野の発展を目論んでいる。特に、近年離散群やグラフ上の解析学の進展が目覚ましい。こうした進展は、情報科学や統計物理学の数学的理解とも深く関連している。我々は離散群とグラフを基本的なテーマとして、その理解の幅を広げることを目的とし、新しい離散群のクラスを導入し、研究を行った。これによりこれまでいくつかの扱いが困難とされていた離散群の位置づけを明確にすることが出来た。

研究成果の概要(英文)：It is expected to develop geometry on discrete objects in connections not only to mathematics but also to other fields in natural sciences. Our research focuses on problems in mathematics and related fields, in particular analysis on discrete groups and graphs, as they form an active research area in recent years. The topic is also related to mathematical aspects of computer sciences and statistical physics. In order to deepen our understanding on discrete groups, we introduced a new class of groups, and have studied its basic property. This clarified its relations to other well-studied groups which had been difficult to analyze.

研究分野：離散群論

キーワード：離散群 グラフ 調和関数

1. 研究開始当初の背景

離散群及び、Lie 群の幾何学とランダムウォークの境界挙動の研究は、古典的には Furstenberg(1971)の Poisson 境界(ポテンシャル論における Martin 境界の測度論的な対応物)による半単純 Lie 群の格子の剛性が知られており、幾何学的群論と関わり現在も多く研究が行われている。これは、それらの群上の非定数有界調和関数の存在に関わる問題である。近年では、調和関数から定まる境界のより精密な測度論的性質や、ランダム媒質の幾何学的性質の解明(統計力学に一つの根拠を持つ)という新しい問題意識にも動機付けられ、ランダムな無限グラフ(パーコレーション)など、種々のグラフの境界が研究されている。これらの無限グラフをランダムウォークの境界という視点から統一的に理解することは、自然な問題設定であり、離散幾何解析の基本となる重要な問題になると考えられる。

2. 研究の目的

離散群、Lie 群上のランダムウォークについて Poisson 境界と調和関数について研究する。特にこれまで行ってきた可解 Lie 群と Lamplighter 群でのそれぞれ対応する問題を発展させ、Hausdorff 次元、スピードなどの重要な量の定量的評価を目指した、精密な研究を行う。また、ランダム媒質の幾何学的性質の解明という新しい問題意識のもとに、Cayley グラフのパーコレーションについて無限クラスター上の調和関数を調べる。これにより、無限グラフ、無限クラスターの大域的構造について、ランダムウォークの境界という観点から統一的に理解したい。さらにスケール極限の研究も継続して行うことで、離散的な性格の強い物性物理、生命科学などの周辺分野の研究をも見据えて、広い視点から解析的基盤を作ることを目的とする。

3. 研究の方法

申請者の研究により多くの計算が可能である 3 次元可解 Lie 群上のランダムウォークの Poisson 境界について、調和測度を中心に調べる。特に調和測度の Hausdorff 次元の精密な評価を行うことで、これまでの結果の定量化を行う。これは主に海外共同研究者と共に研究を進める。またここでの手法を発展させることにより、パーコレーションの無限クラスターにおける Benjamini-Lyons-Schramm 予想を研究する。特に Lamplighter 群の場合にこの予想を詳細に調べる。これにより、無限グラフのランダムウォークの境界についてランダム/ノン・ランダムと比較研究を行う。さらに結晶格子のスケール極限の理論である流体力学的極限を非勾配的対称排他過程の場合に調べる。特に、周辺分野の研究者と議論を進めることで、物理的、生物的に意味のある

モデルを取り上げる。

4. 研究成果

まず、離散群上のポテンシャル論における未解決問題の 1 つである Benjamini-Lyons-Schramm 予想(1997 年)について一定の成果を得た。具体的には、すべての非 Liouville 群についてある $\epsilon_0 < 1$ が存在して、すべての $\epsilon > \epsilon_0$ について無限クラスターは非 Liouville であることを示した。これは非常に弱い主張ではあるが、予想の一部を肯定的に示唆するものである。

離散群上のランダムウォークの境界挙動についての研究では、双曲群上の調和関数についての研究を行った。

これはグロモフ境界上の調和測度の Hausdorff (Patterson-Sullivan) 測度との絶対連続性の必要十分条件をエントロピー・ドリフト・体積増大度の不等式の等号成立条件として与えたものである。これにはエントロピー不等式に対する応用がある。これと関連して、グロモフ双曲空間に作用する群に付随する調和測度の研究を行った。この研究では調和測度の次元公式を最も一般的な形で証明することに成功した。応用として、体積が有限の負曲率リーマン多様体の正則被覆について、それがグロモフ双曲的であるとき、その上のブラウン運動の調和測度について同様の公式が成り立つことが分かった。また acylindrical 双曲群についても同様のアイデアで次元公式を証明することが出来た。これは、写像類群など語双曲でない群も含む重要なクラスの群であるが、作用する空間が proper でないという困難が生じる。この場合、グロモフ境界はコンパクトでないが、この次元公式から、調和測度の次元は有限であり、かつ正であることが分かった。

また従順群の研究では以下のような成果を得た。Liouville 性の研究に関連して、離散アファイン群という新しい群を導入した (Jeremie Brieussel (Universite de Montpellier) と Tianyi Zheng (University of California, San Diego) との共同研究)。離散アファイン群は正則ツリーの自己同型部分群として定義され、双曲平面における放物型部分群(実数体のアファイン群)の離散アナログである。ツリーの離散的な性格上、放物型部分群に対応する群のヴァラエティは(双曲平面とは違った意味で)豊富である。離散アファイン群は、双曲平面でその類似がない、ツリー特有の性質を反映している。我々は、この離散アファイン群の群としての基本的な性質を明らかにし、また(すべての対称生成系についての)非 Liouville 性を示し、さらに Poisson 境界の決定を行った。さらにヒルベルト圧縮定数の値を完全に決定することも出来た。

これらの研究の他にも、ランダムディリクレ級数の研究を行った。これはランダムな無限級数の分布がいつ Lebesgue 測度について絶対連続か、あるいは特異(連続)か、という調和解析における基本的な問題に関わる研究である。絶対連続の場合、分布関数がどれくらい正則か、特異(連続)の場合、分布の Hausdorff 次元はいくつか、ということが問題になる。この研究の動機は、ある Lie 群上のランダムウォークに付随する調和測度の解析にある。ここでは、2パラメータを持つランダムなディリクレ級数を問題にした(この問題は極値統計学と関わるものである)、あるパラメータ領域で分布は絶対連続であり、さらにその中で、パラメータによって密度関数が有界かつ連続、あるいは密度関数が非有界になることを示した。この特別な場合の分布の絶対連続性は、Jim Pitman による問題への解答を与えている。証明には解析数論(一様分布論)における Weyl-van der Corpu の補題を用いる。この成果は論文にまとめられ、出版された。

また流体力学的極限の一般化についても研究を行い、あるクラスの群に付随する被覆グラフの塔において、局所エルゴード定理を導いた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

・Brieussel, J., Tanaka, R.,

Discrete random walks on the group Sol, Israel Journal of Mathematics, Vol.208, no.1 (2015) pp.291-321.

DOI: 10.1007/s11856-015-1200-x

査読有

・Peled R., Peres Y., Pitman J., Tanaka R., Random Dirichlet series arising from records,

Journal of the Mathematical Society of Japan, special issue for Kiyosi Ito, Vol.67, No.4 (2015) pp.1705-1723.

doi: 10.2969/jmsj/06741705

査読有

・Tanaka R.,

A note on a local ergodic theorem for an infinite tower of coverings, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Vol.166 (2016) pp.101-116.

DOI 10.1007/978-4-431-56104-0_6

査読有

・Tanaka R.,

Hausdorff spectrum of harmonic measure, Ergodic Theory and Dynamical Systems,

Vol.37, Issue 1 (2017) pp.277-307.

DOI: <https://doi.org/10.1017/etds.2015.48>

査読有

・Tanaka R.,

Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces,

Ergodic Theory and Dynamical Systems, to appear. Online (2017)

doi:10.1017/etds.2017.23 査読有

arXiv:1605.03874.

[学会発表](計 26 件)

・Tanaka R., February 19, 2016: Numerical characteristics and statistical properties of Gromov hyperbolic groups, Workshop on Random and Statistical Topology, Tohoku University AIMR, Sendai, Japan.

・Tanaka R., December 10, 2015: Harmonic measure and interpolation measure for hyperbolic groups, Random walks and harmonic functions on groups, Laussane, Switzerland.

・Tanaka R., October 27, 2015: Random walk on Gromov hyperbolic groups: entropy and speed, the 14th Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, RIMS, Kyoto University, Japan

・Tanaka R., October 19, 2015: Random walks on hyperbolic groups: entropy and speed, Horowitz Seminar on Probability, Ergodic Theory and Dynamical Systems, School of Mathematics, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel.

・Tanaka R., August 31, 2015: Random walks on hyperbolic groups: entropy and speed, Stochastic Analysis and Applications, Tohoku University, Sendai, Japan.

・Tanaka R., June 18, 2015: Random Dirichlet series arising from records}, Seminaire Probabilite et Statistique, Institut de Mathematique de Marseille, France.

・Tanaka R., June 12, 2015: Random walks on hyperbolic groups: entropy and speed, Seminaire Gaston Darboux, Institut Montpellierain Alexander Grothendieck, Montpellier, France.

・Tanaka R., May 27, 2015: Random walks on hyperbolic groups : entropy and drift, Seminaire Analyse et Geometrie, Institut de Mathematiques de Jussieu, Paris,

France.

・ Tanaka R., May 22, 2015: Random walks on groups: entropy, drift and volume growth,

Groupe de travail en Probabilites du MAP5, Universite Paris Descartes, Paris, France.

・ Tanaka R., November 2015: Random walk on hyperbolic groups: entropy and speed, 多様体上の微分方程式, 金沢大学サテライトプラザ, 金沢(2015年11月12日)

・ Tanaka R., November 2015: ランダムディリクレ級数の相転移, 談話会, 東北大学, 仙台(2015年11月2日)

・ Tanaka R., September 2015: Vershik's question on Gromov hyperbolic groups, 2015年度秋季総合分科会幾何学, 日本数学会一般講演, 京都産業大学(2015年9月16日)

・ Tanaka R., April 2015: Random Dirichlet series and phase transition, 九州確率論セミナー, 九州大学(2015年4月17日)

・ Tanaka R., "Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces", Ryokichi Tanaka, UBC Probability Seminar, Vancouver, BC, Canada (口頭発表; September 21, 2016) 審査無

・ Tanaka R., "Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces", Ryokichi Tanaka, UW Probability Seminar, Seattle, WA, USA (口頭発表; May 23, 2016) 審査無

・ Tanaka R., "さまざまな群の上のランダムウォーク", 第64回幾何学シンポジウム, 金沢大学, 角間キャンパス(基調講演, 口頭発表; August 29, 2017) 審査無

・ Tanaka R., "Dimension of harmonic measures in hyperbolic spaces" Ryokichi Tanaka, The 3rd Japan-China geometry conference, Tohoku University (国際研究集会, 口頭発表; September 3, 2017) 審査無

・ Tanaka R., "ランダム生成系のマルコフ連鎖とカットオフ", 福岡大学微分幾何セミナー, 福岡大学(口頭発表; October 19, 2017) 審査無

・ Tanaka R., "Equivalence of measures at

infinity for word hyperbolic groups", EGGGS(Ergodic and Geometric Group theory in Sendai), Tohoku University (国際研究集会, 口頭発表; October 25, 2017) 審査無

・ Tanaka R., "Continuous and discrete potential theory in Gromov hyperbolic spaces", Global properties in potential theory of continuous and discrete spaces, Hokkaido University (国際研究集会, 口頭発表; November 4, 2017) 審査無

・ Tanaka R., "離散アファイン群のポアソン境界", 2017年度福岡大学微分幾何研究集会, 福岡大学(口頭発表; November 5, 2017) 審査無

・ Tanaka R., "Rough isometries and measures at infinity for word hyperbolic groups", Rigidity School, Nagoya 2017, Nagoya University (国際研究集会, 口頭発表; November 24, 2017) 審査無

・ Tanaka R., "Isoperimetric profile and return probability for the discrete affine group", Geometry and Probability, Tohoku University (国際研究集会, 口頭発表; January 15, 2018) 審査無

・ Tanaka R., "Random walks on the discrete affine group", Young Geometric Analysts' Forum 2018, Sanya, China (国際研究集会, 口頭発表; January 29, 2018) 審査無

・ Tanaka R., "調和測度のハウスドルフ次元公式", リーマン幾何と幾何解析, 筑波大学(口頭発表; February 23, 2018) 審査無

・ Tanaka R., "離散群上のポテンシャル論における距離埋め込みの方法", 日本数学会 2018年度年会 幾何学分科会特別講演, 東京大学(口頭発表; March 18, 2018)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

[http://www.math.tohoku.ac.jp/~r-tanaka/
index.html](http://www.math.tohoku.ac.jp/~r-tanaka/index.html)

6. 研究組織

(1)研究代表者

田中亮吉 (TANAKA, Ryokichi)

研究者番号：80629759

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし

(4)研究協力者

なし