

平成 30 年 5 月 2 日現在

機関番号：16301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800040

研究課題名(和文) Coarse幾何学における次元様相と選択問題の研究

研究課題名(英文) Study of dimension in coarse geometry and selections

研究代表者

山内 貴光 (Yamauchi, Takamitsu)

愛媛大学・理工学研究科(理学系)・准教授

研究者番号：00403444

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：主に粗い幾何学における次元と位相空間論における超空間の選択問題について研究を行った。粗い幾何学における次元については、「整数から成る加法群の可算直和」と「内周の増大するグラフの列の粗非交和」の2つの具体的な距離空間の無限次元性に関する成果を得た。また、距離を一般化した粗構造と、その無限次元概念に関する成果を得た。超空間の選択問題については、連続な弱選択関数の存在と順序化可能性に関する成果を得た。

研究成果の概要(英文)：We mainly studied dimension in coarse geometry and the hyperspace selection problem in general topology. Concerning dimension in coarse geometry, we obtain results on infinite-dimensionality of the following two metric spaces: the countable direct sum of integers; a coarse disjoint union of graphs with large girth. We also have results on coarse structures, which are generalizations of metrics, and their infinite-dimensionality. Concerning the hyperspace selection problem, we obtain results on the existence of a continuous weak selection and orderability.

研究分野：幾何学

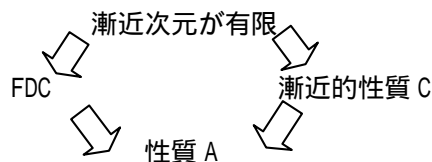
キーワード：coarse幾何 漸近次元 選択関数

1. 研究開始当初の背景

多様体の基本群等の離散群を調べるためには、(非有界)距離空間の局所的情報は無視し、その粗い大域的構造を調べるのが重要になる。その研究は、現在、幾何学的群論や coarse 幾何学(粗い幾何学)として発展している。

Coarse 幾何学における基本的な性質として、Gromov (1993 年)による漸近次元と Yu (2000 年)による性質 A が挙げられる。これらは、Novikov 予想や coarse Baum-Connes 予想に深く関わる。一般に、漸近次元が有限な距離空間は、性質 A を満たす。従って、性質 A は、(漸近次元の有限性より弱いという意味で)漸近次元に関する一種の無限次元的概念と解釈できる。

漸近次元は、位相次元論における被覆次元の coarse 幾何学的類似として導入された。一方、位相次元論における無限次元性として性質 C が知られている。Dranishnikov (2000 年)は、性質 C の coarse 幾何学的類似概念として漸近的性質 C を導入した。また、Guentner, Tessera, Yu (2012 年)は、多様体の位相的剛性に関する定理を証明するために、有限分解複雑性(finite decomposition complexity, FDC)を導入した。これらの概念には次の関係がある。



しかし、FDC と漸近的性質 C の関係や、下の 2 つ矢印の逆の成立については分かっていない。

Coarse 幾何学的な情報が保たれる位相空間の代表的な例として、Higson コロナ(Higson コンパクト化の剰余)がある。固有距離空間の漸近次元が有限であれば、その漸近次元は Higson コロナの被覆次元と一致することが、Dranishnikov (2000 年)によって証明された。しかし、一般の固有距離空間に対してこの一致が成り立つかは未解決である。

2. 研究の目的

本研究の目的は、(1) 具体的な距離空間の無限次元性や、漸近次元と Higson コロナの被覆次元の一致性を調べることで、coarse 幾何学に現れる次元概念の様相を理解すること、及び、(2) 研究代表者がそれまで従事してきた位相空間論における選択理論を coarse 幾何学へ応用すること、であった。

3. 研究の方法

Coarse 幾何学の次元概念については、先行研究と関連分野、及びそれらから生じる種々の問題を調べ、位相空間論的手法による

解決を試みた。選択問題については、位相空間論、特に超空間の選択理論の専門家との研究打合せの機会に恵まれたため、当初の計画を変更し超空間の選択問題を中心に取り組んだ。いずれのテーマにおいても、国内外の研究集会等に参加し、情報収集や関係研究者との研究打合せを行うことで研究を推進した。

4. 研究成果

以下、[]の番号は対応する発表論文の番号を表す。

Coarse 幾何学とその次元様相に関して、次の成果を得た。

FDC と漸近的性質 C の関係について、Dranishnikov, Zarichnyi(2014 年)は、問題「整数から成る加法群の可算直和は漸近的性質 C をもつか」を提起した(この群は FDC を満たす)。論文[8]において、この問題を肯定的に解決した。これにより、漸近的性質 C を満たし漸近次元が無限な群の存在が示された。一方、FDC と漸近的性質 C の 2 つの概念に差があることを示す例が存在するかは分かっていない。

距離を coarse 幾何学的に一般化した概念が知られており、粗構造と呼ばれる。嶺幸太郎氏(神奈川大)と山下温氏(千葉工業大)との共著論文[6]で、それまで距離空間に対して定義されていた C_0 を粗構造を一様空間に自然に拡張することにより、コンパクト化によって作られる位相的粗構造が、ある一様空間によって定まる C_0 粗構造と一致することを示した。これにより、位相的粗構造と C_0 粗構造が本質的に同じ概念であることが分かった。

論文[5]において、Dranishnikov の問題「任意の固有距離空間に対して、その漸近次元とその Higson コロナの被覆次元は一致するか」に反例があるとすると、その空間は、漸近次元に関する(いわゆる)遺伝的無限次元性を満たすことを確かめた。さらに、内周の増大するグラフの列の粗非交和が、漸近次元に関する遺伝的無限次元性を満たすこと、より正確には、粗非交和の部分距離空間の漸近次元が有限だとすると、その漸近次元は必ず 1 以下になること、を示した。従って、この粗非交和が Dranishnikov の問題の反例の候補として考えられるが、実際に反例であるかは分かっていない。

Bell, Moran, Nagorko (2016 年)は、それまで距離空間に対して定義されていた漸近的性質 C や FDC の概念を粗空間(粗構造を備えた集合)への自然に拡張し、それらの概念の関係について論じると共に、問題「Straight finite coarse decomposition complexity を満たす粗空間は coarse property A を満たすか」を提起した。論文[3]において、この問題を肯定的に解決した。これによって、距離空間において成り立つ「FDC 性質 A」が粗空間に対しても成り立

つことが分かった。

コンパクト化の構成方法はいくつか知られているが、Wallman 基とよばれる閉集合の基底から作られるコンパクト化を Wallman 型のコンパクト化という。Higson コンパクト化の位相的性質を調べるために、Y.F. Ortiz-Castillo 氏(サンパウロ大)と共同で、問題「Higson コンパクト化は Wallman 型のコンパクトであるか」に取り組み、Higson コンパクト化が Wallman 型であるための十分条件を得た。これによって、ユークリッド空間の Higson コンパクト化が Wallman 型であることが分かった。

選択理論に関する研究では、coarse 幾何学への応用を得ることができなかったものの、位相空間論的観点から以下の成果を得た。

選択問題に関連する位相空間論の基本的な定理の一つに内挿定理がある。S. Garcia-Ferreira 氏(メキシコ国立自治大)、Y.F. Ortiz-Castillo 氏(サンパウロ大)との共著論文[7]で、次を得た。定義域がパラコンパクト空間または順序数で、終域が長い直線である半連続関数に対して内挿定理は成り立つ。一方、定義域が正規空間である全ての半連続関数に対して内挿定理が成り立つ終域は、実数直線に限る。

2 点集合全体のなす超空間からの選択関数を弱選択関数という。D. Dikranjan 氏(Udine 大)、野倉嗣紀氏(愛媛大)、宮崎和美氏(大阪産業大)との共著論文[4]で、連続な弱選択関数をもつ擬コンパクト空間 X に関して次を得た。まず、 X の Stone-Cech コンパクト化の剰余の濃度の上限と、それが有限になるための必要十分条件を与えた。次に、 X を 3 種類の空間の位相和として表現できることを示した。また、 X 上の連続な弱選択関数から生成される位相の種類を特定した。

積空間上の弱選択関数の存在には、approaching number と pseudo-character とよばれる 2 つの基数が密接に関わることが知られている。D. Shakhmatov 氏(愛媛大)、元岡耕一氏(愛媛大)との共著論文[2]で、フィルター空間と呼ばれる集積点が 1 点のみである空間における上記基数の関係について明らかにした。それによって、フィルター空間やその積空間において、連続な弱選択関数が存在する、または順序化可能であるための必要条件及び十分条件を得た。

元岡耕一氏(愛媛大)との共著論文[1]で、超空間の選択理論で基本的な van Mill-Wattel の定理の別証明を得た。オリジナルの証明では Stone-Cech のコンパクト化を用いていたが、より初等的に直接的に示した。また、その手法を用いて選択関数による弱順序化可能性の特徴づけを得た。

実数値連続関数全体のなす Banach 空間における正則な線形拡張作用素の存在を用いて定義される Dugundji 空間について、D. Shakhmatov 氏(愛媛大)、V. Valov 氏(Nipissing 大)と共同研究を行い、次を得た。

線形作用素の正則性は、(1)作用素ノルムが 1 である、(2)値 1 の定数関数を値 1 の定数関数へ写す、の 2 つの条件によって定められるが、Dugundji 空間の定義において(2)の条件は落とすことができる。従って、線形作用素のノルムの条件のみで Dugundji 空間を特徴付けられることが分かった。本結果を論文にまとめ、現在投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

- [1] Koichi Motooka and Takamitsu Yamauchi, Another proof of a theorem of van Mill and Wattel on weak selections, Colloquium Mathematicum, to appear, 査読有.
DOI:10.4064/cm7214-9-2017
- [2] Koichi Motooka, Dmitri Shakhmatov and Takamitsu Yamauchi, The existence of continuous weak selections and orderability-type properties in products and filter spaces, Topology and its Applications 232 (2017), 45-60, 査読有.
DOI:10.1016/j.topol.2017.09.030
- [3] Takamitsu Yamauchi, Straight finite decomposition complexity implies property A for coarse spaces, Topology and its Applications 231 (2017), 329-336, 査読有.
DOI:10.1016/j.topol.2017.09.034
- [4] Dikran Dikranjan, Kazumi Miyazaki, Tsugunori Nogura and Takamitsu Yamauchi, On pseudocompact spaces with a weak selection, Topology and its Applications, 230 (2017), 490-505, 査読有.
DOI:10.1016/j.topol.2017.08.019
- [5] Takamitsu Yamauchi, Hereditarily infinite-dimensional property for asymptotic dimension and graphs with large girth, Fundamenta Mathematicae 236 (2) (2017), 187-192, 査読有.
DOI:10.4064/fm266-6-2016
- [6] Kotaro Mine, Atsushi Yamashita and Takamitsu Yamauchi, C_0 coarse structures on uniform spaces, Houston Journal of Mathematics 41(4) (2015), 1351- 1358, 査読有.
URL:https://www.math.uh.edu/~hjm/Vol41-4.html
- [7] S. Garcia-Ferreira, Y. F. Ortiz-Castillo and T. Yamauchi, Insertion theorems for maps to linearly ordered topological spaces, Topology and its Applications 188 (2015), 74-81, 査読有.

DOI: 10.1016/j.topol.2015.03.011

- [8] Takamitsu Yamauchi, Asymptotic property C of the countable direct sum of the integers, *Topology and its Applications* 184 (2015), 50-53, 査読有.

DOI: 10.1016/j.topol.2015.01.013

[学会発表](計 17 件)

Takamitsu Yamauchi, Straight finite decomposition complexity and property A for coarse spaces, The 2nd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, Novotel, (Busan, Korea), 2017 年 11 月 13 日.

Takamitsu Yamauchi, Higson compactifications and their coronas, Seminar at University of Sao Paulo, (Sao Paulo, Brazil), 2017 年 8 月 31 日.
山内貴光, 粗空間に対する分解複雑性と性質 A, RIMS 共同研究(公開型)「集合論的・幾何学的トポロジーの動向と諸分野との連携」, 京都大学(京都府京都市), 2017 年 6 月 13 日.

山内貴光, On infinite-dimensional properties for coarse spaces, 第 10 回早稲田幾何学的トポロジー研究集会, 早稲田大学(東京都新宿区), 2017 年 3 月 14 日.

山内貴光, Higson コロナの次元について, 2016 年度つくばセミナー, 筑波大学(茨城県つくば市), 2017 年 3 月 6 日.

山内貴光, 漸近次元に対する遺伝的無限次元性, 数理解析研究所研究集会「集合論的・幾何学的トポロジーとその応用」, 京都大学(京都府京都市), 2016 年 10 月 18 日.

山内貴光, 内周が増大するグラフの列と漸近次元', 第 9 回早稲田幾何学的トポロジー研究集会, 早稲田大学(東京都新宿区), 2016 年 3 月 15 日.

Takamitsu Yamauchi, Hereditarily infinite-dimensional property for asymptotic dimension, The 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, Min Nan Normal University, (Zhangzhou City, China), 2015 年 11 月 29 日.

山内貴光, 線型順序位相空間への写像に対する内挿定理', 数理解析研究所研究集会「集合論的位相幾何学および幾何学的トポロジーの最近の動向と展望」, 京都大学(京都府京都市), 2015 年 11 月 16 日.

Takamitsu Yamauchi, Hereditarily infinite-dimensional spaces concerning asymptotic dimension, Group actions and metric embeddings, 京都大学(京都府京都市), 2015 年 9 月

11 日.

Takamitsu Yamauchi, C₀ coarse structures on uniform spaces, International Conference on Set-Theoretic Topology and its Applications, 神奈川大学(神奈川県横浜市), 2015 年 8 月 25 日.

山内貴光, 漸近次元とその無限次元性, 第 62 回トポロジーシンポジウム, 名古屋工業大学(愛知県名古屋市), 2015 年 8 月 9 日.

Takamitsu Yamauchi, Asymptotic property C of the countable sum of integers, Dubrovnik VIII - Geometric Topology, Geometric Group Theory & Dynamical Systems, Inter-University Centre Dubrovnik, (Dubrovnik, Croatia), 2015 年 6 月 26 日.

山内貴光, Coarse 幾何学における無限次元性について, 第 7 回早稲田幾何学的トポロジー研究集会, 早稲田大学(東京都新宿区), 2015 年 3 月 26 日.

山内貴光, 漸近的性質 C について, 数理解析研究所研究集会「集合論的・幾何学的トポロジーと種々の分野の交流」, 京都大学(京都府京都市), 2014 年 10 月 23 日.

Takamitsu Yamauchi, On infinite dimensionality in coarse geometry, International Workshop on Mathematical Sciences in Matsue, 島根大学(島根県松江市), 2014 年 10 月 11 日.

山内貴光, 整数群の可算直和の粗い幾何学における無限次元性について, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 広島大学(広島県東広島市), 2014 年 9 月 25 日.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~yamauchi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山内 貴光 (YAMAUCHI, Takamitsu)

愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号: 00403444