

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 15 日現在

機関番号：15201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800041

研究課題名(和文) Morse理論と多様体・微分同相群の位相幾何学

研究課題名(英文) Morse theory and topology of manifolds / groups of diffeomorphisms

研究代表者

渡邊 忠之 (Watanabe, Tadayuki)

島根大学・総合理工学研究科・講師

研究者番号：70467447

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：1次ベッチ数が正の3次元多様体の同変摂動的不変量の構成と、有限型不変量との関係について研究した。1次ベッチ数が正の3次元多様体の同変摂動的不変量を、深谷Morseホモトピーの考え方をを用いて構成した。有限型不変量を定義するfiltrationのk次の部分は、ローラン多項式が添加されたk頂点3価グラフの空間から有理関数が添加されたk頂点3価グラフ(Jacobi図)の空間への自然な写像の像以上であることを示した。

研究成果の概要(英文)：We studied a construction of an equivariant perturbative invariant for 3-manifolds with positive first Betti number, and its relation to finite type invariants. We constructed an equivariant perturbative invariant for 3-manifolds with positive first Betti number by using Fukaya's Morse homotopy theory. We showed that the degree k part in a filtration that defines a finite type invariant is at least the image of the natural map from the space of k-vertex trivalent graphs colored by Laurent polynomials to the space of k-vertex trivalent graphs colored by rational functions.

研究分野：位相幾何学

キーワード：Chern-Simons摂動理論 Morse理論 有限型不変量 3次元多様体 微分同相群 有理ホモトピー群

1. 研究開始当初の背景

Axelrod-Singer, Kontsevichにより開発された

Chern-Simons 摂動理論は、3次元多様体に対する Witten の経路積分を形式的に摂動展開して得られた、極めて精密な位相不変量である。特にホモロジーが3次元球面のもと同型となる閉3次元多様体(ホモロジー3球面)に対しては、大量にある有理数値の大概有限型不変量を統一することが示されていた。一方、1次ベッチ数が1の3次元多様体については、大概によって LMO 不変量の精密化が定義され、その場合にも有限型不変量が摂動的な不変量で統一されることが期待されていた。1次ベッチ数が正の3次元多様体に対する有限型不変量の研究はまだ初期の段階であり、その構造の解明は重要である。また、Lescop は、1次ベッチ数が1の3次元多様体に対する摂動的な不変量を、2ループのグラフに対応する部分において、配置空間内の同変交差理論を用いて位相的に構成した。このような位相的な構成方法は、1次ベッチ数が2以上の3次元多様体の摂動的な不変量を見つける上でも有効であると思われる。大概の LMO 不変量の精密化および Lescop の摂動的な不変量は、辺が有理関数で色付けされた3価グラフ(Jacobi 図)によって張られる空間に値を持つ。

非自明な平坦接続を持つ3次元多様体と2ループグラフに対しては、Morse 理論を用いて位相不変量を構成する方法(Morse ホモトピー理論)が深谷賢治によって与えられていた。深谷の不変量は、Chern-Simons 摂動理論に一致すると予想されており、配置空間内の同変交差(ホロノミーの情報を考慮したチェインの交差)によって与えられると解釈できる。研究代表者は、ホモロジー球面と自明接続の場合に深谷の構成を一般の n ループグラフに拡張していた。これをホロノミーの情報付きで考えることにより、Lescop の不変量および、その n ループへの拡張が得られると考えた。

2. 研究の目的

(1) 1次ベッチ数が正の3次元多様体と一般の n ループのグラフに対する摂動的な不変量(有理関数で色付けされた Jacobi 図の空間に値を持つ)を、配置空間内の同変交差理論を用いて構成する。

(2) (1)で構成した不変量を用いて1次ベッチ数が正の3次元多様体の有限型不変量の構造の解明を目指す。

3. 研究の方法

3次元多様体の有限型不変量に関する研究集会や勉強会に参加し、参加した国内及び海外の研究者と研究討論を行い、3次元多様体の有限型不変量および局所系のコホモロジーに関する情報を得た。また、非自明な平坦接続を持つ3次元多様体に対する Chern-Simons 摂動理論に関して、京都大学の清水達郎助教を招聘または訪問することにより研究討論を行った。

4. 研究成果

(1) 深谷の Morse ホモトピーを用いた構成方法において、有理関数に値を取るホロノミーを考えることにより、1次ベッチ数が正の3次元多様体と一般の n ループのグラフに対する摂動的な不変量((可換)有理関数で色付けされた Jacobi 図の空間に値を持つ)を構成した。ここで得られる不変量は、2つの3次元多様体の間の $Z\pi$ ホモロジー同値($Z\pi$ 係数のねじれホモロジーに同型を誘導する M から N への次数1写像、 π は N の基本群)のある同値に関する不変量となる。

(2) (1)で構成した摂動的な不変量は、 $Z\pi$ ホモロジー同値に対する有限型不変量(Garoufalidis-Levine)を与えることを示した。グラフクラスパーに沿った手術で得られる

具体的な $Z\pi$ ホモロジー同値に対して不変量の値を計算することにより、Garoufalidis-Levine の有限型不変量の空間が、有理関数で色付けされた Jacobi 図の空間以上の大きさを持つことを、 N が $S^2 \times S^1$ および 3 トーラスの場合に示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

1. Tadayuki Watanabe, Higher order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of 3-manifolds I. invariants of homology 3-spheres, Asian J. Math. 22 (1) 111-180, 2018. 査読有り

[学会発表](計 10 件)

1. 渡邊忠之, On the 4-dimensional smooth Smale conjecture, トポロジーとコンピュータ 2017, 2017. 10. 21, 大阪大学豊中キャンパス

2. 渡邊忠之, Garoufalidis-Levine's finite type invariants for $Z\pi$ -homology equivalences of 3-manifolds, Casson 不変量に関わる 3次元多様体の不変量, 2017. 1. 27, 京都大学数理解析研究所

3. Tadayuki Watanabe, Morse homotopy and A_∞ structures for surface bundles over S^1 , Workshop on finite type invariants of 3-manifolds, 2016. 3. 31, 東京大学大学院数理科学研究科

4. Tadayuki Watanabe, An invariant of fiberwise Morse functions on surface bundles over S^1 by counting graphs, 日仏共同研究小研究集会 (タイヒミューラ空間と写像類群), 2015. 11. 19, 東京

大学大学院数理科学研究科

5. Tadayuki Watanabe, Finite type invariants of nullhomologous knots in 3-manifolds by counting graphs, Braids, Configuration spaces and Quantum Topology, 2015. 9. 7, 東京大学大学院数理科学研究科

6. 渡邊忠之, An invariant of fiberwise Morse functions on surface bundles over S^1 by counting graphs, リーマン面に関連する位相幾何学, 2015. 8. 25, 東京大学大学院数理科学研究科

7. Tadayuki Watanabe, On equivariant perturbative invariants in 3-dimension by Morse theory, RIMS Seminar: Topology, Geometry and Algebra of low-dimensional manifolds, 2015. 5. 28, 沼津 KKR

8. 渡邊忠之, Morse theory and Lescop's equivariant propagator / On a Morse theoretic invariant of 3-manifolds with $b_1=1$, 空間の代数的・幾何的モデルとその周辺, 2014. 9.17-9.19, 信州大学理学部

9. 渡邊忠之, Equivariant propagator と Amidakuji-like path の moduli を使った実現, Workshop on the universal finite type invariants, 2014.6.9, 東京大学大学院数理科学研究科

10. Tadayuki Watanabe, Morse theory and Lescop's equivariant propagator, Floer and Novikov homology, contact topology and related topics, 2014. 4. 21-24, Kavli IPMU, The University of Tokyo

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.shimane->

u.ac.jp/~tadayuki/

6.研究組織

(1) 研究代表者

渡邊 忠之 (WATANABE, Tadayuki)
島根大学・大学院総合理工学研究科・講師
研究者番号: 70467447

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

(4) 研究協力者

境 圭一 (SAKAI, Keiichi)
信州大学・学術研究院理学系・准教授
研究者番号: 20466824

清水 達郎 (SHIMIZU, Tatsuro)
京都大学・数理解析研究所・特定助教
研究者番号: 00738859