1版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８０００４２

研究課題名（和文）直積写像の特異点論とその応用

研究課題名（英文）Singularity theory of product maps and its applications

研究代表者
高尾　和人（Takao, Kazuto）

京都大学・スーパーグローバルコース数学系ユニット・特定助教

研究者番号：８０６４３８３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、可微分写像の特異点論において、写像の直積構造に着目した新たな研究領域を開拓する基礎研究を行い、その低次元トポロジーへの応用にも取り組んだ。これにより、複数の関数とその直積写像の特異点の安定性や変形に関する幾つかの着実な進展があり、これに基づく今後の研究の発展と応用が期待される。また、関連分野の様々な研究にも並行して取り組み、例えば結び目の橋理論に関する重大な発見があるなど、当初の想定を超える成果も得られた。

研究成果の概要（英文）：I worked on a new area in singularity theory of differentiable maps with particular attention to product structures of maps, and on its applications to low-dimensional topology. In consequence, I made steady progress on the stability and deformations of singularities of the product map of multiple functions, which will hopefully base future developments and applications. I also worked on related topics and obtained some unexpected results, including a certain significant discovery on the theory of bridges of knots.

研究分野：トポロジー

キーワード：可微分写像　特異点　Stein分解　低次元多様体　Heegaard分解　結び目　橋位置　橋分解

１．研究開始当初の背景

本研究の背景には，近年の低次元トポロジーの発展における，ある研究手法の台頭と，そのさらなる活用に向けての懸案として見出された，可微分写像の特異点論に関する問題があった．その概要を以下に説明する．

任意の向き付け可能な閉3次元多様体Mは2つのハンドル体に分解できることが知られており，これをMの Heegaard 分解という．Heegaard 分解は3次元多様体の記述方法として基本的かつ重要だが，多様体に対して一意的ではないため，その分類が大きな研究課題となる．

Heegaard 分解の同値類は自然に Morse 関数のイソトピー類と対応する．Mの2つの Heegaard 分解を表現する Morse 関数$f,g: M \to \mathbb{R}$に対して，直積写像$f \times g: M \to \mathbb{R}^2$，$p \mapsto (f(p), g(p))$は安定写像と仮定できる．その特異点は折り目特異点とカスプ特異点に分類され，特異点集合はM内の幾つかの円周となり，特異値集合はカスプ付き平面曲線となる．実はこの平面曲線がもとの Heegaard 分解たちの関係を良く反映しており，これを graphic と呼ぶ．

Rubinstein━Scharlemann（1996）が graphic の原型を導入し，Heegaard 分解の分類問題に関する研究に用いて以来，graphic とその変種たちは低次元トポロジーの様々な研究に応用され目覚ましい成果をあげている．しかし graphic には大きな任意性がある．Heegaard 分解などの位相的対象を調べるための道具でありながら，実際にはそれを表現する可微分関数の選び方に強く依存する．単にジェネリックな選び方によってさえ導かれた帰結の数々は graphic の強力さを物語るが，関数の選び方によってどれだけ変化し得るのかが明らかになって初めて，graphic はその真価を発揮するはずである．

有用な先行研究として，Morse 理論をはじめとする1次元への関数の特異点論も，その発展としての2次元への写像の特異点論も古くから研究されている．しかし，個別のそれらだけでは graphic の変形を扱うには足りない．関数$f,g: M \to \mathbb{R}$の視点で写像$f \times g: M \to \mathbb{R}^2$の特異点の変形を扱えるような，新しい特異点論の開拓が必要となる．

２．研究の目的

本研究の目的は，写像の直積構造に着目する新しい特異点論の基礎を構築し，さらにそれを低次元トポロジーの様々な研究に応用することであった．その概要を以下に説明する．

写像に対する Stein 分解とは，関数に対する Reeb graph の一般化であり，写像の振る舞いを記述するうえで基本的である．特に安定写像$\varphi: M \to \mathbb{R}^2$の Stein 分解$W_\varphi$は2次元胞体複体となる．2つの Morse 関数$f,g: M \to \mathbb{R}$の直積写像$f \times g$の Stein 分解$W_{f\times g}$は，graphic よりさらに豊富な情報を含んでいるが，やはりf,gの選び方に依存する．1つの写像としてのφのイソトピーによってはW_φの構造は不変だが，fやgのイソトピーによっては$W_{f\times g}$の構造が変化しうるのである．

本研究の基本的な目的の一つは，f,gのイソトピーに伴う$W_{f\times g}$の変形について，先ずは局所変形を集約することであり，そしてそれらを用いて大域的な変形理論を整備し，特に$W_{f\times g}$の簡約化を追求して得られる標準形を求めることであった．多様体Mの不変量や Morse 関数f,gのイソトピー類の不変量をパラメータとして標準形を決定できると期待される．そこには何らかの極めて本質的な情報が顕れるはずであり，極めて強力な応用が可能となるに違いない．特に，標準化の一環として$f \times g$のカスプ特異点を消去できれば，Heegaard 分解の安定化問題に対する最良の評価が得られるなど，著しい応用成果が見込まれる．

本研究の発展的な目的の一つは，より一般の可微分多様体X,P,Qと2つの可微分写像$F: X \to P$，$G: X \to Q$に対しても，直積写像$F \times G: X \to P \times Q$に関する特異点論を展開し，さらにそれを低次元トポロジーの様々な研究に応用することであった．例えば，Xが一般次元で$P = Q = \mathbb{R}$の場合をハンドル分解の研究に，あるいは，$P = S^1$，$Q = \mathbb{R}$の場合や$P = Q = S^1$の場合を円周上ファイバー束の研究に応用できると期待される．さらには，$(\dim X, \dim P, \dim Q) = (4,2,1)$ or $(4,2,2)$の場合を，4次元多様体の broken Lefschetz 束や trisection の研究に応用するなどの発展が考えられる．

３．研究の方法

本研究を推進する方法としては，関連する研究分野の国際会議や研究集会に参加するなどして，多くの研究者たちと議論を交わすことを通して，様々な新しい知見や発想を取り入れた．

特に，2014 年にサンパウロ大学で催された“13th International Workshop on Real and Complex Singularities”，2015 年のバイーア連邦大学での“Brazil━Mexico 2nd Meeting on Singularities”， 2016 年のサンパウロ大学での“14th International Workshop on Real and Complex Singularities”，2017 年のベドレボ会議場での“Geometric and Algebraic Singularity Theory”に参加して講演も行い，世界各地から集結した研究者たちと議論を交わした．また，多くの国内研究集会やセミナーにも積極的に参加し，情報収集や意見交換，および研究成果発表を行った．

４．研究成果

本研究の主な成果の概要を以下に説明する．またその他にも，今後の研究の展開に資する様々な新しい知見や発想を得ることが出来た．

(1) 直積写像の Stein 分解の局所変形

3次元多様体Mと Morse 関数$f,g\colon M\to\mathbb{R}$に対して，直積写像$f\times g$は安定写像と仮定するとき，Stein 分解$W_{f\times g}$の様々な局所変形がf,gのイソトピーによって実現できることを示した．そのなかには例えば，$f\times g$のカスプ特異点の対を生滅させるものや，特異値集合の2重点の数を増減させるものなどを含む．

この結果の系として，安定写像$\varphi\colon M\to\mathbb{R}^2$の Stein 分解$W_\varphi$の様々な局所変形が$\varphi$のホモトピーによって実現できることが従う．なお，$\varphi$のジェネリックなホモトピーに伴う$W_\varphi$の局所変形は Mata-Lorenzo (1989) によって分類されている．しかし分類上の変形が，与えられた写像の Stein 分解の局所構造に対して，いつでも写像のホモトピーで実現できるとは限らない．実現不可能な状況が実際に存在することが Motta–Porto–Saeki (1995) によって知られている．上の系は，Mata-Lorenzoの局所変形たちのうち幾つかについては，いつでも実現可能であることを保証している．

この成果は，本研究の基本的な目的に対する直接的な進展といえる．今後の研究で，実現可能な局所変形を駆使して Stein 分解を簡約化していくアルゴリズムを構成するなどして，標準化やその応用が可能になると期待される．

(2) 3つの関数と直積写像たちの安定特異点

2次元以上の空間から2次元空間への写像の安定特異点は，折り目とカスプに大別され，そのそれぞれが指数によって分類される．また，3次元以上の空間から3次元空間への写像の安定特異点は，折り目とカスプとスワローテイルに大別され，そのそれぞれが指数によって分類される．

3次元以上の可微分多様体Xと3つの可微分関数$f,g,h\colon X\to\mathbb{R}$に対して，$X$の内点$p$を直積写像$f\times g\times h\colon X\to\mathbb{R}^3$の安定特異点と仮定する．このときの関数$f$や直積写像$f\times g$に対する点$p$の特異性と安定性を，$f\times g\times h$の特異値集合の言葉で特徴付けた．より具体的には，$p$が$f\times g\times h$の折り目かカスプかスワローテイルのそれぞれの場合に対して，pがfの Morse 特異点であるための必要十分条件と，$f\times g$の折り目であるための必要十分条件と，$f\times g$のカスプであるための必要十分条件を，$f\times g\times h$の特異値集合の空間特異曲面としての性質によって与え，さらにそれらの安定特異点の指数の関係も明らかにした．

これは本研究の発展的な目的の一部を先取りした成果といえる．「研究の目的」欄の記号で，$(\dim P,\dim Q)=(2,1)$の場合の基礎となるほか，$(\dim P,\dim Q)=(1,1)$の場合の直積写像の変形を議論するための新たな研究手法になるとも期待される．

(3) 境界上の安定特異点のダブル

境界付き多様体とそこに定義される対象が与えられたときに，ダブルをとる，すなわち，それ自体とその鏡像を多様体の境界に沿って貼り合わせる操作を考えることは，トポロジーの研究において常套的である．そこで，多様体間の安定写像のダブルをとることも，自然な構成として考えられる．

境界付きの3次元空間から2次元空間への安定特異点のうち数種類に対して，ある自然な同相的変形を施してダブルをとることで，境界の無い3次元空間から2次元空間への安定特異点にできることを示した．一方で，残りの数種類に対しては，いかなる同相的変形を施してダブルをとっても，安定でない特異点が現れることを観察した．

これは，当初の計画にはなかった研究の展開であるが，特異点論の観点からのトポロジーの研究に対する有意な指摘となる成果といえる．

(4) 結び目の橋位置と橋分解

結び目理論において「橋」のアイデアは基本的であるが，その定式化は一通りではない．そのうち橋位置の概念は，結び目理論の古来の観点に基づいて，空間内での結び目の位置として定義される．一方で橋分解の概念は，3次元多様体論の観点に基づいて，空間内の球面による結び目の分解として定義される．これまでは，橋位置と橋分解は等価な概念として解釈され，これらの用語も定式化も混用されてきた．

小林毅氏と小沢誠氏と張娟姫氏との共同研究により，橋位置と橋分解の間に本質的な違いが現れることを発見した．そして，任意の結び目Kと自然数nに対して，Kのn-橋分解の同値類集合から，Kの結び目型のn-橋位置の同値類集合への全射が存在し，それが単射でない例が存在することを示した．

この結果により，与えられた二者が同値であることの証明は橋分解の場合の方が難しく，同値でないことの証明は橋位置の場合の方が難しいといえる．どちらの場合にも分類問題はそれぞれ基本的かつ重要であるが，それらを混同してはならないのである．この発見は従来の知見に対する再検証や再構築をも要求する．

この成果は，特異点論とは異なる見地からの研究によるものであり，当初の計画では想定もしなった有意義な発見といえる．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 4 件）

[1] K. Takao, *Two Morse functions and singularities of the product map*, Comm. Anal. Geom. **24** (2016), no. 3, 645–671, DOI: 10.4310/CAG.2016.v24.n3.a8.（査読有）

[2] Y. Jang, T. Kobayashi, M. Ozawa and K. Takao, *A knot with destabilized bridge spheres of arbitrarily high bridge number*, J. London Math. Soc. (2) **93** (2016), no. 2, 379–396, DOI: 10.1112/jlms/jdw004.（査読有）

[3] K. Takao, *Lips and swallow-tails of singularities of product maps*, J. Singul. **10** (2014), 286–295, DOI: 10.5427/jsing.2014.10t.（査読有）

[4] K. Takao, *Heegaard splittings and singularities of the product map of Morse functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), no. 4, 2209–2226, DOI: 10.1090/S0002-9947-2013-06015-1.（査読有）

〔学会発表〕（計 16 件）

〈1〉 高尾和人,「安定写像の境界和について」, 可微分写像の特異点論の局所的研究と大域的研究，京都大学, 2017 年 11 月

〈2〉 K. Takao,「Singularities of three functions and the product maps」, Geometric and Algebraic Singularity Theory，ベドレボ会議場, 2017 年 9 月

〈3〉 K. Takao,「On bridge positions and bridge decompositions」, The 12th East Asian School of Knots and Related Topics，東京大学, 2017 年 2 月

〈4〉 高尾和人,「Singularities of three functions and the product maps」，トポロジー・幾何セミナー，広島大学, 2016 年 11 月

〈5〉 高尾和人,「Heegaard surfaces and singularities of product maps」，低次元トポロジーセミナー，京都大学, 2016 年 11 月

〈6〉 高尾和人,「結び目の橋位置と橋分解」, N-KOOK セミナー，大阪市立大学文化交流センター, 2016 年 10 月

〈7〉 高尾和人,「A survey on Heegaard surfaces of 3-manifolds」，特異点論ミニワークショップ“GERMS BE AMBITIOUS”，北海道大学, 2016 年 8 月

〈8〉 K. Takao,「Singularities of three functions and the product maps」, 14th International Workshop on Real and Complex Singularities，サンパウロ大学, 2016 年 7 月

〈9〉 高尾和人,「On bridge positions, bridge decompositions and bridge spheres」, Friday Seminar on Knot Theory，大阪市立大学, 2015 年 12 月

〈10〉 K. Takao,「Local moves of the Stein factorization of the product map of two functions」, The sixth Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities，鹿児島大学, 2015 年 11 月

〈11〉 高尾和人,「Heegaard 分解と直積写像の特異点」，ハンドル体結び目とその周辺Ⅷ, 早稲田大学, 2015 年 9 月

〈12〉 K. Takao,「Heegaard splittings and singularities of product maps」, 2nd Brazil-Mexico Meeting on Singularities，バイーア連邦大学, 2015 年 7 月

〈13〉 高尾和人,「Singularities of the product map of two functions」，生成的幾何学における特異点とその応用，神戸大学, 2015 年 6 月

〈14〉 K. Takao,「Realizing local moves of the Stein factorizations of smooth maps from 3-manifolds to 2-manifolds」, 13th International Workshop on Real and Complex Singularities，サンパウロ大学, 2014 年 7 月

〈15〉 高尾和人,「Incompressible surfaces and Heegaard surfaces in 3-manifolds」, Intersection of Pure Mathematics and Applied Mathematics Ⅴ，九州大学, 2014 年 5 月

〈16〉 高尾和人,「任意に橋数の高い既約橋球面をもつ結び目」，トポロジー金曜セミナー，九州大学, 2014 年 4 月

6．研究組織

研究代表者

高尾　和人（TAKAO Kazuto）
京都大学・スーパーグローバルコース数学系ユニット・特定助教
研究者番号：80643832