

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 16 日現在

機関番号：15501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800043

研究課題名(和文) 離散問題への応用を視野に入れた、同変トポロジーの具体的な計算手法の確立

研究課題名(英文) Computational methods in equivariant topology with applications in discrete problems

研究代表者

鍛冶 静雄 (KAJI, Shizuo)

山口大学・大学院創成科学研究科・准教授

研究者番号：00509656

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：良い群作用を持つ空間、例えばトーラス作用が作用する旗多様体やトーリック多様体を通じて、トポロジーと組み合わせ論が密接に関連付く。本研究では、これらの空間のトポロジーを、代数的位相幾何学と組み合わせ論の道具を用いて考察した。コホモロジー環やコホモロジー作用素を具体的に扱うアルゴリズムを開発し、コンピューター上のプログラムとして実装・公開した。

研究成果の概要(英文)：Spaces with nice group actions, such as flag manifolds and toric manifolds, are studied by algebraic topological and combinatorial techniques. Algorithms to deal with cohomology rings and cohomology operations are obtained and implemented.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：位相幾何学 同変トポロジー 旗多様体 トーリック多様体

1. 研究開始当初の背景

トーリック多様体や旗多様体など、高い対称性をもつ空間の多くの興味深いクラスについて、トポロジーと離散的な対象が強く関連付けられる事が知られている。これらの場合、空間の構造が半順序集合やヤング図形の組合わせ論を通して調べられ、また反対に、グラフや多面体に関する主張が対応する空間のトポロジーから導かれてきた。本研究では、リー群作用を持つ空間について、対応する離散的対象をその具体的な計算方法まで含めて調べる事を目的とする。

2. 研究の目的

リー群やリー群の作用を持つ空間は、組合せ論や代数的な手法により具体的な計算が行える。その手法を発展させること、より進めて計算機上で扱える形にまで落とし込むことにより、さまざまな一般論の確認や予想に役立つ上に、他分野への応用の可能性も開くことが本研究の目的である。

3. 研究の方法

代数的位相幾何学の基本的な道具である、素数における局所化、調べたい空間とホモトピー同値になる簡単な空間の直積や一点和を構成するホモトピー分解を用いて対象となる空間を簡略化する手法、またグラフや半順序集合と空間の位相不変量を対応づける同変トポロジーの典型的な手法を用いて、特に旗多様体と(実)トーリック多様体を調べた。得られたアルゴリズムは計算機代数ソフトウェアである Maple 上のコードとして実装した。

4. 研究成果

H26 年度は、旗多様体の位相不変量について考察した。旗多様体は様々な分野に自然に現れる対象であり、その不変量の計算は大きなテーマである。本研究では特に代表的な位相不変量として、ホモトピー群とコホモロジー環を中心に調べた。まず、コンパクトリー群の等質空間上のループ空間のホモトピー型を調べ、大きな素数で局所化すると球面上の球面束の直積に分解することを示した。この結果は、旗多様体や対称空間のホモトピー群の計算に利用でき、特に p -exponent と呼ばれる不変量の計算をした。また、旗多様体の同変コホモロジーについても考察した。旗多様体の同変コホモロジーは、Chevalley によるシューベルト多様体を用いた幾何学的な表示、Borel によるワイル群の余不変式環としての代数的な表示、Goresky-Kottwitz-MacPherson による、グラフを使った組み合わせ論的な表示の 3 つが与えられている。どれも一長一短がある

が、それらの間の関係を考察し、目的に応じて行き来する方法を与えた。この結果を実際に計算機上に実装し、同変シューベルトカルキュラスの基本的な問題である、同変構造定数の計算などに利用できるようにした。

H27 年度は、実トーリック多様体について考察し、その懸垂空間を奇素数で局所化すると、小さなブロックの一点和にホモトピー同値になることを示した。これは既に知られていたコホモロジー群に関する代数的な結果のホモトピー型レベルへの一般化である。

H28 年度は、コホモロジー作用素のなす代数であるスティーンロッド代数と積を持つ空間である H 空間の研究を行なった。スティーンロッド代数の双対はライプニッツ・ホップ代数と呼ばれる、対称関数と関わり深い代数的組合せ論的な対象に埋め込むことができる。この埋め込みを通して、スティーンロッド代数の古典的な性質を拡張し、その新しい簡易な証明を与えた。また、スティーンロッド代数とライプニッツ・ホップ代数を扱うアルゴリズムを考案し、プログラムを開発した。

H 空間は、位相群のホモトピー論的な拡張である。ある空間上に、 H 空間の構造が入るかどうかが、また入るならば、それはホモトピー可換であるか、ホモトピー結合的であるか、という問いは基本的である。本研究では、ある種の H 空間上に、ホモトピー結合的な積がいくつ存在するのかという問題を考察した。

H29 年度は、ワイル群に付随する実トーリック多様体のコホモロジーを計算した。実トーリック多様体は、よく研究されている複素トーリック多様体と平行な議論がそのまま適用できず、違った手法が必要であったり全く異なる結果が得られるために興味深い。ここでは半順序集合などの組合せ論とうまく関連づけて、ワイル群に付随する実トーリック多様体のトポロジーを扱うことができた。

全年度を通して、応用面では、リー群とリー環の対応を用いて、3次元物体を変形するアルゴリズムを開発した。さらにこの結果をコンピューターグラフィックスソフトウェアのプラグインとして実装した。本研究で開発したソフトウェアはすべて、ソースコードを代表者のホームページで公開している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

N. D. Turgay and S. Kaji, The mod 2 dual Steenrod algebra as a subalgebra of the mod 2 dual Leibniz-Hopf algebra, Journal of Homotopy and Related Structures, Volume 12, Issue 3, pp. 727--739, 2017, 査読有

S. Choi, S. Kaji, and S. Theriault, Homotopy decomposition of a suspended real toric space, the special volume of the Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana dedicated to Sam Gitler, Volume 23, Issue 1, pp 153--161, April 2017, 査読有

S. Kaji, Three presentations of torus equivariant cohomology of flag manifolds, to appear in Proceedings of International Mathematics Conference in honour of the 70th Birthday of Professor S. A. Ilori., 査読有

Shizuo Kaji, Michihiro Sakai, Stephen Theriault, Counting the number of homotopy associative multiplications on certain H-spaces, Topology and its Applications vol.214, 137--149, 2016, 査読有

Shizuo KAJI, Akihiro Ohsita, and Stephen Theriault, Mod p decompositions of the loop spaces of compact symmetric spaces, Algebraic & Geometric Topology, vol.15, 1771--1811, 2015, 査読有

S. Kaji and G. Liu, Probe-type deformers, Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis II, pp. 63--77. Springer-Japan, 2015, 査読有

[学会発表](計 14 件)

Shizuo KAJI, Point and diagonal classes in flag varieties, The 7th East Asian Conference on Algebraic Topology (EACAT 2017), IISER Mohali, India, 1 Dec. 2017

Shizuo KAJI, Representations on Real Toric Manifolds
Princeton-Rider workshop on the Homotopy Theory of Polyhedral Products, Princeton Univ./Rider Univ., 29 May 2017

Shizuo KAJI, Equivariant string products
The 5th GeToPhyMa: Summer school "Rational homotopy theory and its interactions" celebrating Jim Stasheff and Dennis Sullivan for their 80th and 75 anniversary, UIR, Rabat, Morocco, 20 Jul 2016.

Shizuo KAJI, The dual Steenrod algebra and the overlapping shuffle product
Antalya Algebra Days XVII, Nesin Maths Village, Turkey, 23 May 2015.

Shizuo KAJI, External products in equivariant homology
Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications, Skoltech, Moscow, 17 Feb, 2015.

Shizuo KAJI, Mod-p decompositions of the loop spaces of compact symmetric spaces
29th British Topology Meeting, Southampton, UK, Sep. 8. 2014

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等
<http://skaji.org>
Shizuo KAJI's web page

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鍛冶 静雄 (KAJI, Shizuo)
山口大学・大学院創成科学研究科・准教授
研究者番号: 00509656

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4)研究協力者

Suyoung Choi

Associate Professor, Ajou University

Stephen Theriault

Professor, Southampton University