

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 5 日現在

機関番号：32670

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800045

研究課題名(和文) Dirac型作用素の摂動による指数理論の可積分系への応用とその深化

研究課題名(英文) Deepening and application to integrable systems of index theory via perturbation of Dirac operator

研究代表者

藤田 玄 (Fujita, Hajime)

日本女子大学・理学部・准教授

研究者番号：50512159

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究における成果は以下のものである。1. ファイバーに沿ったDirac型作用素による摂動を用いた指数理論において自然な同境の概念を定義し、その同境に関して指数が不変であることを示した。2. トーリックorigami多様体の同変Riemann-Roch数の格子点への局所化の幾何学的な証明を得た。3. HamiltonianなS1作用をもつ非コンパクトシンプレクティック多様体に対するある種の同変指数に関する論文の改訂を行った。また近年発展しているループ群作用に関する同変指数に関する局所化を模索した。

研究成果の概要(英文)：The results in this research are followings. 1. We defined the natural notion of cobordism in index theory via perturbation by Dirac operators along fibers, and we showed cobordism invariance of our index. 2. We gave a geometric proof of localization of equivariant Riemann-Roch number of toric origami manifolds. 3. We revised a paper about an S1-equivariant index of non-compact symplectic manifold with Hamiltonian S1-action. We also studied a localization of index in recent development of loop group equivariant index theory.

研究分野：幾何学(シンプレクティック幾何学、指数理論)

 キーワード：Dirac作用素 同変指数 指数の局所化 トーリック多様体 特異ファイバー Origami多様体 Delzant
多面体 幾何学的量子化

1. 研究開始当初の背景

多様体の幾何的/位相的不変量がその多様体のある部分領域に局所化するという現象は幾何学の多くの場面で現れ、不変量の計算の観点から、また、理論的観点からも重要であり多くの研究と応用がなされてきた。

これまでに、古田幹雄氏(東大数理)と吉田尚彦氏(明治理工)との共同研究により閉多様体上である種のトーラス束とそのファイバーに沿った Dirac 型作用素による摂動を用いた Dirac 型作用素の指数理論を展開した。我々の指数理論は切除公式、和公式などの位相的な性質をもち、応用として閉多様体上の位相的指数の局所化公式を得ている。この局所化公式はシンプレクティック幾何学への応用が念頭にあるものであった。実際、幾何学的量子化の文脈で重要である Riemann-Roch 数という不変量に対する適用例として、これまでに現象論的に観察されてきた等式に幾何学的に自然な意味づけを与えることができた。

M.Braverman は、群作用がある(非コンパクト)多様体上で我々が用いた摂動と conceptual には類似した摂動を用いてある種の同変指数を定義した。Braverman の理論は、Ma-Zhang による Vergne 予想の解決などへ応用されている。

2. 研究の目的

本研究の目的の一つめは、これまでに整備してきた指数の局所化の理論をより多くの状況に応用することである。具体的には、Riemann 面上の平坦接続のモジュライ空間上で定義される Goldman 系や、Grassman 多様体上に定義される Gelfand-Cetlin 系などの可積分系などを対象とする。目的の二つめは、Braverman の指数理論との関係および差異を明らかにすること、である。

3. 研究の方法

(1) 平坦接続のモジュライ空間や Grassmann 多様体上の可積分系などに我々の指数理論を適用して幾何学的に精密な局所化公式を得るために、可積分系の構造から決まる、局所的に定義された整合的なトーラス束の族を構成する。また、球面特異ファイバーの近傍の局所モデルを記述し、その寄与を計算する。

(2) 我々のファイバーに沿った作用素による摂動を用いた指数理論と既存の理論、特に Braverman の同変ベクトル場の Clifford 積による摂動を用いた指数理論との内在的な関係を理解するために、2 つの摂動を含む摂動の族の解析的振る舞いを考察する。

4. 研究成果

① 指数の同境不変性 :

これまでに確立してきたトーラス束とそのファイバーに沿った Dirac 型作用素による摂動を用いた指数理論において自然な同境の概念を定義し、その同境に関して指数が不変であることを示した。幾何学的不変量の同境不変性はその不変量の基本的な性質であると思われるが、それ以上に我々の理論においては以下の応用がある。ファイバーに沿った Dirac 型作用素による摂動で閉多様体上の指数理論を展開する際、多様体の端の開被覆と各開集合上のある種のファイバー束がまず必要となる。得られる指数は与えられたデータの連続変形で不変であることは既知であったが、開被覆のとり方というある種の離散的なデータにどう依存するかは明らかでなかった。指数の同境不変性の系として、ある自然な仮定をみたすような開被覆の取り換えに関しては指数は変化しないことがわかる。この結果は理論上はもちろん、応用上も極めて有用なものである。

② 可積分系への応用 :

当初目的としていた平坦接続のモジュライ空間や Grassmann 多様体上の可積分系への応用までは到達できなかったが、本研究の成果のひとつとして、トーリック origami 多様体の同変 Riemann-Roch 数の格子点への局所化の幾何学的な証明を得たことがある。Origami 多様体とは、超曲面でのある退化を許容した 2 次微分形式が付与された多様体であり、それらに対して symplectic 幾何の種々の概念や結果が拡張されている。とくに、Hamiltonian トーラス作用に関する凸性定理やトーリック多様体の分類定理の拡張が知られている。トーリック多様体上のよい複素直線束の切断の空間にはトーラスが自然に作用するが、そのトーラス表現としての構造は対応する Delzant 多面体(運動量写像による像)に含まれる格子点から定まる表現に一致する。これは Danilov の定理とよばれるトーリック幾何での基本的な定理である。この定理のトーリック origami 多様体に対する拡張を我々の指数の局所化理論を用いて証明した。トーリック多様体は可積分系の一種であるので、この結果は可積分系の拡張に対する結果とみなせる。さらに本研究での証明は格子点への局所化の描像を忠実に与えており、さらに退化がない場合として本来の Danilov の定理の別証明も与えており、幾何的かつ直接的なものになっている。

③ S1 作用を用いた非コンパクト多様体に対する同変指数の考察 :

Hamiltonian な S1 作用をもつ非コンパクトシンプレクティック多様体に対するある種の同変指数の定式化およびその量子化予想の証明に関する論文が何度かの改訂を経て

Math. Res. Let.へ掲載された。当初の研究目的であった Braverman の摂動による同変指数理論との関係の内在的な関係は明らかにできなかった。しかし、近年 Y. Song や高田士満らが考察している、ループ群作用に関する同変指数の研究の知見を得ることで、S1 のループ群作用の場合のその同変指数の局所化を考察するという新たな研究の方向性をえることができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

1. Hajime Fujita, A Danilov-type formula for toric origami manifolds via localization of index, to appear in Osaka Journal of Mathematics. (2018 年発行予定)
2. Hajime Fujita, S1-equivariant local index and transverse index for non-compact symplectic manifolds, Mathematical Research Letters, Vol. 23 (2016), no. 5, 1351-1367.
3. Hajime Fujita, Cobordism invariance and the well-definedness of local index, Annals of Global Analysis and Geometry, Vol. 47, Issue 4 (2015), 399-414.

[学会発表] (計 11 件)

●国際研究集会

1. Hajime Fujita, Localization of index via torus fibrations and a Danilov-type formula for toric origami manifolds, The First Japan-Taiwan Joint Conference on Differential Geometry & the 8th TIMS-OCAMI-WASEDA Joint International Workshop on Differential Geometry and Geometric Analysis, 2016.
2. Hajime Fujita, A Danilov-type formula for toric origami manifolds via localization of index, Toric topology 2016 in Kagoshima, 2016. (Organizers : Hiroaki Ishida, Shintaro Kuroki, Mikiya Masuda)
3. Hajime Fujita, Danilov type formula for toric origami manifolds via localization of index, 6th International Conference on Geometry and Quantization (GEOQUANT), 2015. (Organizers : Martin Schlichenmaier, Joachim Hilgert, Ryoichi Kobayashi, Armen

Sergeev, et. al.)

4. Hajime Fujita, On well-definedness of the local index, Topology of Torus actions and Applications to Geometry and Combinatorics, 2014. (Organizers : Anthony Bahri, Victor Buchstaber, et. al.)

●国内研究集会

1. Hajime Fujita, Equivariant Riemann-Roch number for non-compact symplectic manifolds, Gauge theory in Fukuoka, Nishijin Plaza and Kanpo no Yado Yanagawa, 2018.
2. 藤田玄, Delzant 多面体のモジュライ空間上の距離関数について, 淡路島幾何学研究集会 2018, 2018 年.
3. Hajime Fujita, On a metric on the moduli space of Delzant polytopes, Toric Topology 2017 in Osaka, 2017.
4. Hajime Fujita, Equivariant Riemann-Roch number of non-compact symplectic manifolds, 変換群を核とする代数的位相幾何学(RIMS 共同研究(公開型)), 2017 年.
5. 藤田玄, 幾何的量子化周辺のあれこれ - 局所化の観点から -, 新しい幾何学に向かって 2, 2016 年.
6. 藤田玄, Danilov type theorem for toric origami manifolds via localization of index, 非可換幾何学と数理論理学 2015, 2015.
7. 藤田玄, 非コンパクトシンプレクティック多様体に対する $[Q, R]=0$ 型定理, 淡路島幾何学研究集会 2015, 2015 年.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ

<https://sites.google.com/view/hajimefujitashomepage>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤田 玄 (FUJITA, Hajime)
日本女子大学・理学部・准教授

研究者番号：50512159