

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 21 日現在

機関番号：34315

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26800047

研究課題名(和文)特性類に基づく群作用及び葉層構造の剛性の研究

研究課題名(英文) Research on rigidity of foliations and group actions based on characteristic classes

研究代表者

野澤 啓 (Nozawa, Hiraku)

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号：80706557

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,600,000円

研究成果の概要(和文)：空間のより低次元な空間への分割によって定まる葉層構造という幾何構造について、特性類という不変量を用いて研究を行った。主な成果はG.Meigniez(南ブルターニュ大学)と共同で対称空間に局所計量同型な葉を持つリー葉層構造が等質葉層構造という特殊な例に限ることを証明し、リーマン葉層の剛性に応用したことである。また、O.Goertsches(マルブルグ大学)、D.Toben(サンカルロス連邦大学)と共同でリーマン葉層構造の特性類の局所化公式を示し、佐々木多様体の体積の計算等に応用した。さらに、ケーラー葉層構造や双曲多様体の単位接束上の横断的に等質な葉層の特性類等について成果を得た。

研究成果の概要(英文)：I investigated on foliations, which are geometric structures on spaces determined by a decomposition of the space to lower dimensional spaces. The first main result of this project is obtained in a collaboration with G. Meigniez (University of South Bourtagne): We proved that Lie foliations with locally symmetric leaves are homogeneous. We applied this result to prove certain rigidity of Riemannian foliations. The second main result of this project is obtained in a collaboration with O. Goertsches (Marburg University) and D. Toben (Federal University of San Carlos). We showed a Atiyah-Bott-Berline-Vergne type localization formula for characteristic classes of Killing foliations to calculate the volume of Sasakian manifolds. We also obtained some results on characteristic classes of Kahler foliations and certain foliations on the unit tangent bundle of hyperbolic manifolds.

研究分野：幾何学

キーワード：微分位相幾何 葉層構造 特性類 剛性理論 対称空間 局所化 佐々木幾何

1. 研究開始当初の背景

(1) [葉層構造とは] 本研究のテーマは葉層構造と呼ばれる幾何構造、特にその対称性に関するものである。葉層構造とは空間のより次元の小さい空間(葉と呼ばれる)へのある種の分割である。葉層構造の正確な定義はを参照する。直観的な例は川の流線への分割やパイ(3次元空間)のパイシート(2次元空間)への分割である。葉層構造の分類や幾何的性質は曲面上の微分方程式、流れや群作用の研究を動機として研究されてきた。葉は自分自身や他の葉に巻きつくことからある種の対称性を持ち、葉層構造は興味深い幾何学を内包している。

(2)[葉層構造の分類と二次特性数] 閉リーマン面がオイラー数と呼ばれる不変量によって分類できることは良く知られている。つまり、二つの閉リーマン面に対して、それらが同相であることと、それらのオイラー数が等しいことは同値である。葉層構造はその構造の多様性から、同相による分類を単純な形で与えるのは難しい。葉層構造の分類問題においては、Godbillon-Veyらによって発見された二次特性類、二次特性数と呼ばれる不変量を用い、同境と呼ばれる同相よりある意味で弱い同値関係に関する分類を考えることが通常である。ここで3次元空間上の二つの葉層構造が同境であるとは、それらを境界を持つような4次元空間とその上の葉層構造が存在するときと言う。

Godbillon-Vey 数を初めとする二次特性数は葉層構造の幾何の不思議な性質を捉えていることがこれまでの Thurston, Ghys, 坪井, Hurder-Katok らの研究により知られている(参照)。Godbillon-Vey 類に関わる興味深い現象の一つは、葉層構造を連続的に変形したときに Godbillon-Vey 数も連続的に変化することである。Thurston(参照)はこの現象を発見することにより、3次元球面上の2次元葉層構造の同境類が非加算個となることを示した。オイラー数などの古典的な空間の位相不変量については、このような現象は起こらない。

(3)[二次特性類と葉層構造の剛性] 松元の剛性定理(参照)、Hurder-Katokによる三松の欠損公式(参照)など、曲面上の測地流の安定葉層に関して、葉層構造の二次特性数やそれに関わる不変量が、いくつかの場合に対称性の高い葉層構造において極値をとるという現象が知られている。これらの現象は二次特性類が剛性的な性質を持つことから来るものと考えられる。群作用の剛性の理論とも関わり、これらの現象の背後にある幾何学を明らかにすることには意味があると考えられる。

ただ、現時点ではこれらの現象は散発的なものでしかなく、二次特性類の剛性的な

性質を定量的に研究することは難しい。

そこで、これらの現象に関する理解を深めるため、より広い対象に対して同様の現象が起こることを示すことができるかどうか、本研究ではその可能性を追求することを目指した。

<引用文献>

田村一郎, 『葉層のトポロジー』, 岩波書店

Steven Hurder, Dynamics and the Godbillon-Vey class: a history and survey. *Foliations: geometry and dynamics* (Warsaw, 2000), 29-60, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

William Thurston, Noncobordant foliations of S^3 . *Bulletin of the American Mathematical Society*. 78 (1972), 511-514.

Shigenori Matsumoto, Some remarks on foliated S^1 bundles. *Inventiones Mathematicae* 90 (1987) 343-358.

Steven Hurder, Anatole Katok, Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov flows. *Publications Mathématiques de l'Institut Hautes Études Scientifique* 72, (1991) 5-61.

2. 研究の目的

松元の剛性定理(上記参照)、Hurder-Katokによる三松の欠損公式(上記参照)という葉層構造の二次特性類が剛性的な性質を持つ現象が知られている。本研究では、二次特性類と葉層構造の剛性の関係に関する理解を深めるため、これらの双曲曲面に関する現象を高次元の場合に拡張することを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 閉双曲多様体に対する剛性理論である Mostow 剛性(参照)では、双曲空間の無限境界が用いられた。ここで、無限境界とは双曲空間上の測地的半直線たちの無限遠点のなす集合であり、双曲空間の次元が n のとき、その無限境界は $n-1$ 次元球面となる。松元の剛性定理、三松の欠損公式を高次元に拡張する際には、その葉が双曲多様体となるような葉層構造について考察することになる。よって、葉たちの被覆空間の無限境界の性質を調べることで葉層構造の剛性を捉えることが可能となると考えられる。二次特性類と葉の無限境界の関係は難解であ

ったが, Gaël Meigniez 氏(南ブルターニュ大学)との共同研究により, Lie 葉層構造という横断的に Lie 群の幾何構造を持つ葉層構造に対しては, 葉層構造が強い剛性を持つことを示すことができた.

(2) 葉層構造が横断的な幾何構造を持つ場合には, 二次特性類の計算や葉層構造の剛性をそれらの幾何構造を用いて定式化することができる. Jesús Antonio Álvarez López 氏(サンティアゴ=デ=コンポステラ大学)との共同研究では, 高次元の双曲多様体の単位接束上の葉層構造が横断的に等質な構造を持つ場合について, Godbillon-Vey 類と展開写像, ホロノミー群などの大域的な性質の関係を調べ, 部分的な剛性定理を得ることができた.

(3) 二次特性類の研究の難しさの一つはその計算が難しい点にある. 二次特性類の数少ない具体的な計算の手段の一つは局所化と呼ばれる, ある種の特異点集合の局所的な性質に計算を帰着させるものである. Oliver Goertsches 氏(マルブルグ大学), Dirk Töben 氏(サンカルロス連邦大学)との共同研究では, リーマン葉層構造という横断的にホロノミー不変な計量を持つ葉層構造について, 同変コホモロジーの理論を用いてその二次特性類を閉葉の和集合に局所化することで, Atiyah-Bott-Berline-Vergne 型公式を示すことができた. また, Baum-Bott(参照)によって構成された接続を用いてケーラー葉層およびリーマン葉層の二次特性類を計算し, 森田の特性類も含めて変形可能な二次特性類全てが独立に変化するような葉層構造の族を構成した. また, Green の記述(参照)を用いてカルタン接続による双曲多様体の単位接束上の測地流の安定葉層の Godbillon-Vey 形式の局所座標による計算を行った.

<引用文献>

George Daniel Mostow, Strong rigidity of locally symmetric spaces. *Annals of Mathematics Studies*, No. 78. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1973.

Paul Baum, Raoul Bott, Singularities of holomorphic foliations. *Journal of Differential Geometry* 7 (1972), 279-342.

Leon Green, The generalized geodesic flow. *Duke Mathematical Journal* 41 (1974), 115-126; correction, *ibid.* 42 (1975), 381.

4. 研究成果

(1) (Gaël Meigniez 氏(南ブルターニュ大学)

との共同研究) 閉多様体上の極小なリーマン葉層構造 F の葉がポアンカレ円盤を直和成分に持たない非コンパクト型対称空間 X に局所的に計量同型であるとき, F が等質な葉層構造という非常に対象性が高い標準的例に微分同相であることを示し, 既に得られていた剛性定理を一般化した. また, F の余次元が X の任意の既約成分の計量同型群の次元以上であることを示し, X の各直和成分の階数が 2 以上というより強い条件の下で F のホロノミー群が数論的になるという Zimmer の定理(参照)を拡張した. 対称空間に局所的計量同型な葉を持つリーマン葉層が類似の剛性を持つことを示した. 論文 "Rigidity of Lie foliations with locally symmetric leaves" をほぼ完成した.

(2) (Jesús Antonio Álvarez López 氏(サンティアゴ=デ=コンポステラ大学)との共同研究) 閉双曲多様体の単位接束上の横断的に等質な葉層構造 F について, その展開写像が Serre ファイブレーションとなることを示した. また, この事実を応用してこの葉層構造の Godbillon-Vey 類が 0 でなければ, 葉の端が 2 つとなることはないこと, およびそのホロノミー群は測地流の安定葉層構造のホロノミー群と等しいことを証明した.

(3) (Oliver Goertsches 氏(マルブルグ大学), Dirk Töben 氏(サンカルロス連邦大学)との共同研究) リーマン葉層構造の特性類の閉葉への局所化について Atiyah-Bott-Berline-Vergne 型公式を示した上で佐々木幾何などに応用し, 論文 "Localization of Chern-Simons type invariants of Riemannian foliations" を発表した.

(4) 横断的なケーラー構造を持つ葉層構造およびリーマン葉層の特性類について研究し, 複素射影空間とトーラス上の稜束上の葉層構造の特性類を計算することで, 全ての可変な特性類が独立に変形することを示し, 分類空間のある次数の整係数コホモロジーが非加算次元となることを示した. これらは Heitsch(参照)や Hurder(参照)の研究のリーマン葉層構造の森田の特性類やケーラー葉層構造への拡張である. 論文 "Independent variation of secondary characteristic classes of Riemannian foliations" を執筆中である.

(5) 双曲多様体の単位接束上の測地流の安定葉層について, Green の記述を用いて Godbillon-Vey 形式の局所座標による表示を得た.

<引用文献>

Robert J. Zimmer, Arithmeticity of holonomy groups of Lie foliations. *Journal*

of American Mathematical Society 1 (1988), 35-58.

James L. Heitsch, Independent variation of secondary classes. *Annals of Mathematics* (2) 108 (1978), no. 3, 421-460.

Steven Hurder, On the secondary classes of foliations with trivial normal bundles. *Commentarii Mathematici Helvetici* 56 (1981), no. 2, 307-326

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

Oliver Goertsches, Hiraku Nozawa, Dirk Töben, Localization of Chern-Simons type invariants of Riemannian foliations, *Israel Journal of Mathematics* に掲載予定.

[学会発表](計13件)

Oliver Goertsches, Hiraku Nozawa, Dirk Töben, Topology of Sasakian manifolds and torus actions, 第43回変換群論シンポジウム, 姫路市市民体育館(兵庫県姫路市), 2016年11月18日

野澤 啓, ケーラー葉層構造の特性類の変形について, 葉層構造と微分同相群 2016, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市), 2016年10月20日

Hiraku Nozawa, Independent variation of secondary characteristic classes of Riemannian foliations, *Foliations 2016*, Research and Conference Center in Bedlewo (ベドレヴォ, ポーランド), 2016年7月16日

Jesús Antonio Álvarez López, Gaël Meigniez, 野澤 啓, (G, X) -葉層構造の剛性と特性類について, 日本数学会年会特別講演, 筑波大学(茨城県つくば市), 2016年3月17日

Jesús Antonio Álvarez López, 野澤 啓, 葉層構造の二次特性類の有限的側面について I, II, 幾何学阿蘇研究集会, 休暇村 南阿蘇(熊本県阿蘇郡高森町), 2015年9月25日

Hiraku Nozawa, Property (T) and local rigidity of Riemannian foliations, Group actions and metric embeddings, 京都大学理学部(京都府京都市) 2015年9月9日

野澤 啓, ケーラー葉層の二次特性類の変形について, 研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」, 旭川市民ときわホール(北海道旭川市), 2015年1月22日

Gaël Meigniez, 野澤 啓, Lie 葉層構造の剛性について, 微分トポロジーセミナー, 京都大学理学部(京都府京都市), 2014年10月

28日

Gaël Meigniez, 野澤 啓, Riemann 葉層の剛性, 葉層構造と微分同相群 2014 研究集会, 東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市), 2014年10月20日

Oliver Goertsches, 野澤 啓, Dirk Töben, Riemann 葉層の Chern-Simons 型不変量の局所化, 日本数学会秋季総合分科会, 広島大学(広島県東広島市), 2014年9月27日

Gaël Meigniez, Hiraku Nozawa, Rigidity of Riemannian foliations with locally symmetric leaves, Workshop Geometry and Dynamics of Foliations, Instituto de Ciencias Matematicas (マドリッド, スペイン), 2014年9月2日

Gaël Meigniez, 野澤 啓, Lie 葉層の剛性について, 第61回幾何学シンポジウム, 名城大学(愛知県名古屋市), 2014年8月24日

Gaël Meigniez, 野澤 啓, Lie 葉層の剛性について, 幾何コロキウム, 東京大学数理学部(東京都目黒区), 2014年4月24日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野澤 啓 (NOZAWA, Hiraku)

立命館大学・理工学部・准教授

研究者番号: 80706557