

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：14301
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：26800048
研究課題名(和文) Random Matrix Theory and its applications

研究課題名(英文) Random Matrix Theory and its applications

研究代表者

COLLINS Benoit (Collins, Benoit)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：20721418

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：この研究課題ではランダム行列と呼ばれる確率変数を要素に持つ行列のスペクトルの研究をモーメント法と呼ばれる方法で研究した。

具体的にはWeingarten解析と呼ばれる方法を発展させ、その結果をランダム行列を用いて作られる量子情報理論における重要なモデルに適用した。特に、MOEの加法性の破れに対して新しいアプローチを与えたり、エンタングルメントの判定と呼ばれる量子情報理論における極めて重要な問題に対して、ランダム行列理論から新しい重要な例を構成した。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we investigated random matrices, which are matrices with random elements, via the moment method. Especially, we developed so-called Weingarten calculus and applied it to random matrix models which appear in quantum information theory. For example, we gave a new approach to the problem of violation for the additivity of the minimum output entropy and obtained new examples in the problem of entanglement detection. These problems are quite important problems in quantum information theory.

研究分野：functional analysis

キーワード：Random matrices quantum information

1. 研究開始当初の背景

ランダム行列理論(RMT)は、20世紀初頭数理統計学の中で Wishart による共分散の推定問題の研究の中で始まった。その後、ランダム行列理論の系統的研究は、量子物理の枠組みにおいて 1963 年ノーベル賞を受賞した Wigner による 1958 年に *Annals of mathematics* で出版された論文の研究で始まった。

ランダム行列理論における基本的な問題としてそのスペクトルの研究がある。行列のスペクトルの情報は、そのモーメントを通して理解することができる。すなわち、 $n \times n$ 行列 A の固有値の情報を得るためには、行列モーメント $\text{Tr}(A^k)$ が分かればよい。ランダム行列の分野では、この方法はモーメント法と呼ばれている。モーメント法による Haar 分布に従うランダム行列の解析は、Weingarten 解析と呼ばれている。

一方、1980年代なかばに Voiculescu により提唱された非可換確率論の枠組みの中で自由独立性と呼ばれる新しい独立性を入れた確率論である自由確率論と呼ばれるものがある。この自由独立性は 1991 年の Voiculescu 自身の論文の中でランダム行列のサイズ極限として現れることが示された。その結果をもとに、独立な複数のランダム行列の和や積の経験固有分布のサイズ極限を見積もる手法として定着している。端的にいうと良い独立な複数のランダム行列は行列モーメントのもとでそのサイズ極限で自由独立な非可換確率変数と見ることができるとことが示されたため、自由確率論はランダム行列の研究に非常に有用なツールとなっている。

この自由確率論とランダム行列の理論の発展の流れの中で、研究代表者はランダム行列の行列モーメントを計算する方法として古くから知られている Weingarten 解析を再整備し、自由確率論に応用するための、ランダム行列のモーメントの計算法を発展させ続けてきている。

近年、ランダム行列理論が量子情報理論の研究の中で興味深い量子チャンネルを構成する際に多く用いられるようになってきている。このようなランダム行列由来のモデルに対し、研究代表者は量子情報理論の研究者 Ion Nechita や自由確率論の研究者 Serban Belinschi により自由確率論的な手法がインパクトのある結果を出すことができると示した。

2. 研究の目的

本研究はランダム行列理論を応用すること、特に量子チャンネルやエンタングルメントなどの量子情報理論に関する研究やコンヌ埋め込み予想に関係する作用素環論の問題への応用を目指して、その基礎になる研究を整備し、応用することを目的としている。具体的には研究代表者が、これまで基礎理論

に貢献してきているランダム行列理論におけるモーメント法による研究の手法である Weingarten 解析を基礎に、テンソル積空間に値を取るランダム行列へ拡張し、これを量子情報理論へ適用し、新しい複数のランダム行列を同時に扱い、物理系を解析する手法を提示することを目指す。このような研究はランダム行列を用いた量子情報の研究、例えば minimum output entropy (MOE) の加法性の破れの研究や完全正值ではないが正值である写像の構成の研究など、に応用することが目標のひとつとなる。また逆に量子情報理論に現れる重要な例を構成するため、ランダム行列を用いて研究するため、Weingarten 解析を改良し、より構造が複雑なランダム行列を量子情報理論の文脈で取り扱えるようにすることを目指す。

3. 研究の方法

共同研究者らを訪問したり、研究代表者の所属する京都大学へ招聘したりし、研究打ち合わせを行い、それを元に結果をまとめた論文を執筆することで、研究課題を進めた。

主に Michael Brannan, Ion Nechita, Ping Zhong, Motohisa Fukuda を招聘した。

また、それらの関連する講演等を行い、講演を聞き情報収集することで、幅広く本研究課題に関する最新の話題を吸収し、本研究課題を滞ることなく、絶えず前進させた。

4. 研究成果

次の成果をあげた。

(1) フィールド賞受賞者である A. Connes が 1976 年の有名な論文で出した予想として提出したコンヌ埋め込み予想と呼ばれる重要な予想がある。任意の有限型フォン・ノイマン環は行列環の超積に埋め込めるだろうという予想である。これに対し Michael Brannan, Roland Vergnioux, とともに Connes Embedding property がパラメータ $n > 2$ の任意の自由直交群に対して成り立つことを示した。その結果を論文「The Connes embedding property for quantum group von Neumann algebras」としてまとめられ、査読付きの国際的な専門誌から出版された。

(2) minimum output entropy (MOE) という量子通信路を評価する際に大切な量がある。この MOE という量に対して、2つの量子チャンネルのテンソル積の MOE はそれぞれの量子チャンネルの MOE の和になるであろう、という予想があったが Hastings (2009) によりその予想を否定する例が与えられた。これは Holevo 容量という量の加法性と同値であり、その詳細が非常に注目されている。Ping Zhong と Motohisa Fukuda とともに自由確率論における free compression と Bercovici と Voiculescu による superconvergence の技術を用いて、この (MOE) の加法性の破れのシンプルな証明を見つけた。特に自由確率論を使って compression norm と呼ばれるもの

の評価を与えられることが重要であると考える。その結果は「Estimates for compression norms and additivity violation in quantum information」としてまとめられ、査読付きの国際的な専門誌から出版された。

(3) Todd Kemp と Antoine Dahlqvist とともにユニタリ行列上のブラウン運動が自由ユニタリブラウン運動に強収束することを示した。すなわち、作用素ノルムでも収束することを示した。したがって、その outlier は存在しない、ということが示せたこととなる。論文「The spectral edge of unitary Brownian motion」としてまとめ、査読付きの国際的な専門誌から出版された。

(4) 近年ランダム行列を用いた量子チャンネルの研究が盛んになってきている中で、研究代表者らの自由確率論的なテクニックを使った研究が一定の成果を上げてきている。そこで、これらの結果を整理し伝えるために、Ion Nechita とともにランダム行列を使った手法による量子情報理論の研究のサーベイ「Random matrix techniques in quantum information theory」を書いた。これは査読付きの国際的な専門誌から出版された。

(5) 量子情報理論においてランダム行列を用いた線形写像の構成が脚光を浴びている。Ion Nechita と Patrick Hayden とともにランダム行列を用いた新しい正值だが完全正值でない写像の族の構成法を発見した。これは partial transposition test という量子情報理論においてよく使われるエンタングルメントを検出する方法では見逃されてしまうようなエンタングルメントを検出する方法となっている。それを論文「Random and free positive maps with applications to entanglement detection」としてまとめた。査読付きの国際的な専門誌から出版された。

(6) 1979 年に Haagerup が自由群環フォン・ノイマン環に与えた Haagerup inequality を用いて、MOE の加法性の破れの証明法を見つけた。その結果は、「Haagerup's inequality and additivity violation of the Minimum Output Entropy」としてまとめた。査読付きの国際的な専門誌から出版された。

(7) 自由確率論において、ランダム行列のサイズ極限で自由確率変数が現れる原理をユニタリ行列の空間上で Haar 測度に従うランダム行列が Haar unitary 要素と呼ばれるものに収束することを用いて説明される。この事実を拡張するため、Pierre Yves Gaudreau Lamarre とともに Haar ユニタリランダム行列のテンソル積に対する*-自由性の特徴付を行った。多くの場合、ユニタリによるテンソルが自由性を保持するための条件となる。論文「*-freeness in finite tensor products」としてまとめ査読付きの国際的な専門誌から出版された。

(8) Termeh Kousha, Rafal Kulik, Tomasz

Szarek, Karol Zyczkowski とともに accessibility の概念を導入し、 d 次元ユークリッド空間上の凸体が次元にのみ依存する定数のもとで accessibility をみたすということを示した。これを用いて run and hit アルゴリズムを評価し、量子情報理論や統計力学で現れる具体的な凸体に対する run and hit アルゴリズムに適用し評価を得た。これについて「The accessibility of convex bodies and derandomization of the hit and run algorithm」を執筆し、査読付きの国際的な専門誌から出版された。

(9) 研究代表者がランダム行列の行列モーメントを計算する方法として長年研究してきた Weingarten calculus というものがある。これにより、ランダム行列のサイズ極限を考えた際の行列モーメントの漸近挙動がわかり、それにより自由確率論におけるモデルに、どのように収束するかがわかる。Weingarten calculus の中ではその行列モーメントの表現公式に Weingarten 関数という関数が現れ、この関数の評価が肝要となる。表現論、組合せ論的な観点から Weingarten calculus を研究してきた Sho Matsumoto とともに、現在ではその証明方法が Weingarten 本人が最初に Weingarten calculus を始めた際のものとは大きく異なったものになっているため、原点の証明法を見直し、新しく、Weingarten 関数の漸近様評価を得た。その結果をまとめ、「Weingarten calculus via orthogonality relations: new applications」を執筆し国際的な査読付きの専門誌から出版された。

(10) Konrad Szymanski, Tomasz Szarek, Zyczkowski とともに「Convex set of quantum states with positive partial transpose analysed by hit and run algorithm」を執筆した。この論文は(8)の発展させたもので、PPT states の凸体上の一様測度について調べ、その分布やノルムについて漸近的挙動についてのいくつかの結果を得て、また固有値分布の極限についての数値計算による予想も立てた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

- ① Collins, Benoît. Haagerup's inequality and additivity violation of the Minimum Output Entropy, 査読付, Houston J. Math. (2018), 44, no. 1, pp. 253-261.
<https://www.math.uh.edu/~hjm/Vol144-1.html>
- ② Collins, Benoît; Dahlqvist, Antoine; Kemp, Todd. The spectral edge of unitary Brownian motion. 査読付, Probab. Theory Related

- Fields170(2018), no. 1-2, 49-93. DOI:10.1007/s00440-016-0753-x.
- ③ Collins, Benoît; Hayden, Patrick; Nechita, Ion. Random and free positive maps with applications to entanglement detection. 査読付, Int. Math. Res. Not. IMRN (2017), no. 3, 869-894. DOI:10.1093/imrn/rnw054
- ④ Brannan, Michael; Collins, Benoît; Vergnioux, Roland The Connes embedding property for quantum group von Neumann algebras. 査読付, Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), no. 6, 3799-3819. DOI:10.1090/tran/6752
- ⑤ Collins, Benoît; Gaudreau Lamarre, Pierre Yves *-freeness in finite tensor products. 査読付, Adv. in Appl. Math. 83 (2017), 47-80. DOI:10.1016/j.aam.2016.09.002
- ⑥ Collins, Benoît; Kousha, Termeh; Kulik, Rafał; Szarek, Tomasz; Życzkowski, Karol The accessibility of convex bodies and derandomization of the hit and run algorithm. 査読付, J. Convex Anal. 24 (2017), no. 3, 903-916. <http://www.heldermann.de/JCA/JCA24/jca24.htm>
- ⑦ Collins, Benoît; Matsumoto, Sho Weingarten calculus via orthogonality relations: new applications. 査読付, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 14 (2017), no. 1, 631-656. http://alea.impa.br/portugues/index_v14.htm
- ⑧ Szymański, Konrad; Collins, Benoît; Szarek, Tomasz; Życzkowski, Karol Convex set of quantum states with positive partial transpose analysed by hit and run algorithm. 査読付, J. Phys. A 50 (2017), no. 25, 255206, 12 pp. DOI: 10.1088/1751-8121/aa70f5
- ⑨ Collins, Benoît; Nechita, Ion Random matrix techniques in quantum information theory. 査読付, J. Math. Phys. 57 (2016), no. 1, 015215, 34 pp. DOI: 10.1063/1.4936880
- ⑩ Collins, Benoît; Fukuda, Motohisa; Zhong, Ping Estimates for compression norms and additivity violation in quantum information. 査読付, Internat. J. Math. 26 (2015), no. 1, 1550002, 20 pp. DOI: 10.1142/S0129167X15500020
- Paris, France, 2017-02-20
- ② Collins, Benoît, Free probability and quantum information theory, colloquium, Luxembourg, 2016-11-05
- ③ Collins, Benoît, quantum information theory and free probability free probability seminar, Universitat Saarelandes, 2016-11-01
- ④ Collins, Benoît, Coefficients of the basis elements dual to the Temperley-Lieb basis and Weingarten Calculus, International conference on mathematical physics, AIMR, 2016-08-08
- ⑤ Collins, Benoît, Free probability for quantum computation, Autrans summer, school, Escandille, 2016-07-16
- ⑥ Collins, Benoît, Random Matrix Theory, intensive course, Hokudai, Math department, 2016-06-20
- ⑦ Collins, Benoît, Applications of the Haagerup's inequality and strong convergence of random matrices to quantum information theory, theoretical physics seminar, Stanford, 2016-03-24
- ⑧ Collins, Benoît, Free probability for random matrices with purely discrete eigenvalues, Berkeley, Berkeley, 2016-03-23
- ⑨ Collins, Benoît, Positive maps from free probability theory, MAQIT, Cheongju, 2016-02-15
- ⑩ Collins, Benoît, Probabilites libres pour des modeles matriciels de rang approximativement petits, Probability seminar, Paris 6 university, 2016-02-09
- ⑪ Collins, Benoît, Quantum groups and quantum information, operator algebra seminar, the University of Tokyo, 2016-01-06
- ⑫ Collins, Benoît, Entanglement and the area law, mathematical physics summer school, the University of Tokyo, 2015-08-28
- ⑬ Collins, Benoît, De Finetti theorems in quantum information theory, separable states, and (quantum) group symmetries, Herstmonceux, Herstmonceux, 2015-07-13
- ⑭ Collins, Benoît, k-positive maps and free probability, Oberwolfach, Oberwolfach, Germany, 2015-06-07
- ⑮ Collins, Benoît, Random positive maps, Random Matrices and their Applications,
- [学会発表] (計 18 件)
- ① Collins, Benoît, Asymptotic representation theory, IHP, asymptotic representation theory,

- 2015-01-06~2015-01-09, Hong Kong
⑯ Collins, Benoît, Weingarten
Calculus and applications, Winter
school on Operator Spaces,
Noncommutative Probability and
Quantum Groups,
2014-12-01~2014-12-12, Metabief
⑰ Collins, Benoît, Random positive
maps, Recent Developments in
Operator Algebras, 2014-09-08~2014
-09-10, RIMS
⑱ Collins, Benoît, (Random) Tensors
and (Asymptotic) Freeness,
Programme on “Combinatorics,
Geometry, and Physics” (招待講演),
2014-07-14~2014-07-18, ESI Vienna

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~collins/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

ブノワ・コリンズ (Benoit Collins)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号: 20721418

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

① 福田素久 (Motohisa Fukuda)

山形大学・理学部・准教授

研究者番号: 70771161

② 松本 詔 (Sho Matsumoto)

鹿児島大学・理工学域理学系・准教授

研究者番号: 60547553

(4) 研究協力者

① Brannan, Michael

Department of Mathematics, Texas A&M
University

② Zhong, Ping

Department of Mathematics, University of
Waterloo

③ Dahlqvist, Antoine

Statlab, University of Cambridge

④ Kemp, Todd

University of California San Diego

⑤ Ion Nechita

CNRS, Laboratoire de Physique Théorique,
Université Paul Sabatier

⑥ Patrick Hyden

Physics Department, Stanford University
Gaudreau Lamarre, Pierre Yves

Princeton University

⑦ Kousha, Termeh

Department of Mathematics and Statistics,
University of Ottawa

⑧ Kulik, Rafał

Department of Mathematics and Statistics,
University of Ottawa

⑨ Szarek, Tomasz

Department of Mathematics, University of
Gdansk

⑩ Życzkowski, Karol

Institute of Physics, Jagiellonian
University, Krakow, and Center for
Theoretical Physics, Polish Academy of
Sciences

⑪ Szymański, Konrad

Institute of Physics, Jagiellonian
University, Cracow, Poland