

平成 30 年 6 月 25 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800054

研究課題名(和文)無限グラフ上のラプラシアンの特値とBECの研究

研究課題名(英文)Study of spectra of Laplacians on infinite graphs and BEC

研究代表者

鈴木 章斗 (SUZUKI, Akito)

信州大学・学術研究院工学系・准教授

研究者番号：70585611

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：グラフ上の離散ラプラシアンの特値は、物質中を運動する自由粒子のエネルギーを表し、ボース・アインシュタイン凝縮(BEC)は巨視的数の粒子が最低エネルギーの状態に落ち込む現象である。この場合、グラフは物質の構造を表す。本研究では、無限グラフ上のラプラシアンの特値とグラフの形状の関係を明らかにし、BECが起きるようなグラフの例を構成した。副産物として、ラプラシアンに相互作用項を加えた離散ラプラシアンやランダムウォークの量子版である量子ウォークの特値の構造も明らかになった。特に、量子ウォークの長時間極限分布を与える弱収束定理も証明した。

研究成果の概要(英文)：The spectrum of the discrete Laplacian on a graph describes the energy of a free particle moving in a substance and the Bose-Einstein condensation is a phenomenon that a macroscopic number of particles occupy the lowest energy state. In this case, the graph represents the structure of the substance. In this study, we have clarified the relation between the spectra of the Laplacians on infinite graphs and the shapes of the graphs. We have also given examples of graphs where BEC occurs. As by-products, we have revealed the structure of the discrete Schrödinger operator consisting of the Laplacian and an interaction term and that of a quantum walk, which is a quantum mechanical counterpart of a random walk. Moreover, we have proved the weak limit theorem, which gives the long-time limit distribution of the quantum walk.

研究分野：数理物理

キーワード：無限グラフ スペクトル BEC 離散ラプラシアン 離散シュレーディンガー 量子ウォーク 結晶格子

1. 研究開始当初の背景

物質中を運動する自由粒子のエネルギーは、グラフ上の(離散)ラプラシアンの特値によって記述される。この場合、グラフが、物質の構造を表す。たとえば、六角格子状に並んだ炭素原子からなるグラフェンとそれに水素を付加して得られるグラファイトでは電気伝導性が異なるように、化学修飾された物質は、化学修飾する前後で物性が変化する。このことは、ラプラシアンの特値の性質が化学修飾によるグラフの振動によって変化することからある程度説明できる。このようなグラフの振動と特値の変化の関係に関する研究は、応用上重要な物質の化学修飾を説明するような無限グラフの場合には、これまで体系的になされていなかった。このような研究が困難な点の一つは、振動前のラプラシアンが作用するヒルベルト空間と振動後のラプラシアンが作用するヒルベルト空間が異なる点にある。

2. 研究の目的

本研究では、化学修飾に対応するグラフの振動の中でも、水素を付加することに対応する、ペンダント頂点の付加による無限グラフの振動を考えた。このような振動を行うとき、その付加する数や配置によって、ラプラシアンの特値がどのように変化するかを研究した。また、特値の変化が、粒子の集団的振る舞いにどのような影響を及ぼすかをみるために、ボース・アインシュタイン凝縮が起きるようなグラフの振動についても研究をおこなった。

3. 研究の方法

本研究では、特値の変化を見るために、特値ギャップや固有値の有無などに着目した。また、ペンダント頂点の付加による振動後のラプラシアンを、Feshbach 写像などの作用素の変換を用いて、振動前のラプラシアンが作用するヒルベルト空間上の作用素に変換して、異なる2つのヒルベルト空間で働く作用素を同一の空間で比較する理論を構築した。

4. 研究成果

Feshbach 写像を用いることで、振動後のラプラシアンを、振動前のラプラシアンが作用する空間上の離散シュレーディンガー作用素に書き換え、その言葉で振動後のラプラシアンの特値ギャップや固有値の有無を表現することができた。この場合、離散シュレーディンガー作用素のポテンシャルは、各点に付加されたペンダント頂点の数に対応する。

このようなスペクトルの結果を利用して、BEC が起きるような無限グラフの例を構成した。より詳しくは、 d 次元正方格子に対して、 $d-1$ 次元以下のペンダント頂点を付加するような振動では、臨界密度が有限値をとることを示した。また、このような振動では隠されたスペクトル(hidden spectrum)の存在を示し、状態密度を計算した。さらに、BEC 状態を構成するために、一般化されたペロン・フロベニウス固有関数を構成したが、BEC 状態の構成は研究半ばである。

一方、異なる空間で働く作用素の研究によって、重要な副産物を得ることができた。それは、量子ウォークの時間発展を表すユニタリ作用素のスペクトルがラプラシアンや離散シュレーディンガーの言葉で表現できるような、作用素の変換を発見したことである。より詳しくいうと、量子ウォークの時間発展のスペクトルは、ラプラシアンや離散シュレーディンガーのスペクトルのジュコフスキー変換の逆変換で与えられる。以上により、

Feshbach 変換など：

ペンダント頂点をもつラプラシアン
離散シュレーディンガー

ジュコフスキー変換：

量子ウォークの時間発展
ラプラシアンや離散シュレーディンガー

のようなスペクトルの対応関係を導くことができた。

さらに、2つ目の関係を応用して、量子ウォークのスペクトルやその長時間極限分布を与える弱収束定理の証明も行った。

スペクトルについては、スペクトルの形状の同定や、スペクトルの性質、特に特異連続スペクトルの非存在やスペクトルの絶対連続性、固有値の存在、非存在定理などである。特筆すべき点として、これまで解析が困難だった、高次元の量子ウォークや、結晶格子以外の周期性をもたないような無限グラフ上の量子ウォークなどのスペクトルが計算できるようになったことが挙げられる。

弱収束定理については、1次元量子ウォークに対して、短距離型と呼ばれる条件を考え、そのような仮定の下で散乱理論を構築し、散乱理論を用いて弱収束定理を示した。また、弱極限分布の表現公式を導き、スペクトルの性質と量子ウォークの長時間挙動の関係を明らかにした。さらに、これらの議論を非等方的な場合や高次元の場合などに拡張した。同様の議論が非線形量子ウォークと呼ばれるモデルでも適用可能であることを示し、そのようなモデルの散乱理論や弱収束定理も証明した。非線形量子ウォークの数学的な

研究としては、これが最初のものである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

S. Richard, A. Suzuki, R. Tiedra de Aldecoa, Quantum walks with an anisotropic coin II: scattering theory, *Lett. Math. Phys.* (First Online: 21 May 2018) pp.1-28 (査読有)
DOI: 10.1007/s11005-018-1100-1

M. Maeda, H. Sasaki, E. Segawa, A. Suzuki K. Suzuki, Scattering and inverse scattering for nonlinear quantum walks, *Discrete Continuous Dyn. Syst.* **38**(7):3687-3703, 2018 (査読有)
DOI:10.3934/dcds.2018159

S. Richard, A. Suzuki, R. Tiedra de Aldecoa, Quantum walks with an anisotropic coin I: spectral theory, *Lett. Math. Phys.* **108**(2):331-357, 2018 (査読有)
DOI: 10.1007/s11005-017-1008-1

T. Fuda, D. Funakawa, A. Suzuki, Localization of a multi-dimensional quantum walk with one defect, *Quantum Inf. Process.* **16**:203, 24pages, 2017 (査読有)
DOI: 10.1007/s11128-017-1653-4

I. Sasaki, A. Suzuki, Essential spectrum of the discrete Laplacian on a perturbed periodic graph, *J. Math. Anal. Appl.* **446**(2):1863-1881, 2017 (査読有)
DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.09.063

A. Suzuki, Asymptotic velocity of a position-dependent quantum walk, *Quantum Inf. Process.* **15**:103-119, 2016 (査読有)
DOI: 10.1007/s11128-015-1183-x

E. Segawa, A. Suzuki, Generator of an abstract quantum walk, *Quantum Stud: Math. Found.* **3**(1):11-30, 2016 (査読有)
DOI: 10.1007/s40509-016-0070-1

[学会発表](計 19 件)

船川大樹, 布田徹, 笹山智司, 鈴木章斗, 2次元スプリットステップ量子ウォークの固有値解析, 日本数学会年会, 2018年

鈴木章斗, Long-time behavior of quantum walks, 浜松偏微分方程式研究集会, 2017年

A. Suzuki, Asymptotic behavior of

quantum walks, Linear and nonlinear waves, 2017年

船川大樹, 布田徹, 笹山智司, 鈴木章斗, 2次元4状態量子ウォークの局在化について, 日本数学会秋季総合分科会, 2017年

鈴木章斗, Scattering theory in quantum walks, 波動・摂動・流れの制御と逆問題理論と数値計算, 2017年

鈴木章斗, Spectral analysis of quantum walks, 微分方程式の解の伝搬構造, 2017年

A. Suzuki, Spectral mapping techniques in quantum walks, Mathematical aspects of quantum fields and related topics, 2017年

A. Suzuki, Weak limit theorem for discrete time quantum walks, Scattering theory and mathematical theory, 2017年

鈴木章斗, 空間依存するコインをもつ2次元2状態量子ウォークの弱収束定理, 日本数学会年会, 2017年

布田徹, 船川大樹, 鈴木章斗, 原点にdefectを持つ多次元量子ウォークの固有値と局在化について, 日本数学会年会, 2017年

A. Suzuki, Weak limit theorem for quantum walks, Physical and mathematical approaches to interacting particle systems, 2017年

布田徹, 船川大樹, 鈴木章斗, 1次元スプリット・ステップ量子ウォークの局在化, 日本数学会秋季総合分科会, 2016年

鈴木章斗, スペクトル散乱理論を用いた量子ウォークの弱収束定理の証明, 応用数学合同研究集会, 2016年

鈴木章斗, 空間依存するコインをもつ量子ウォークの弱収束定理, 第55回実函数論・函数解析学合同シンポジウム, 2016年

鈴木章斗, 離散時間量子ウォークの散乱理論と弱収束極限について, 2016年

鈴木章斗, 量子ウォーカーの漸近挙動と弱収束定理, 日本数学会年会, 2016年

鈴木章斗, 量子ウォークのスペクトル写像定理と生成子, 日本数学会秋季総合分科会, 2015年

伊藤将吾, 鈴木章斗, 密度零のポテンシ

様 式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

ヤルをもつ離散シュレーディンガー作用素
の隠されたスペクトル, 日本数学会年会,
2015年

伊藤将吾, 鈴木章斗, 遠方で減衰しない
ポテンシャルをもつ離散シュレーディンガー
作用素のスペクトル, 日本数学会秋季総
合分科会, 2014年

6. 研究組織

研究代表者

鈴木 章斗 (SUZUKI, Akito)

信州大学・学術研究院工学系・准教授

研究者番号: 70585611