

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成30年6月18日現在

機関番号：13801

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800057

研究課題名(和文) Levi平坦境界の領域の高次の強擬凸概念の探求

研究課題名(英文) Higher order pseudoconvexity for domains with Levi-flat boundary

研究代表者

足立 真訓 (ADACHI, Masanori)

静岡大学・理学部・講師

研究者番号：30708392

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：Levi平坦面と呼ばれる複素多様体による流れの与えられた多様体を研究した。複素解析学・力学系理論・微分幾何学の観点を組み合わせて研究を行い、以下の研究成果を得た：複素射影平面内の(非存在が予想されている)Levi平坦面の曲率制約を改善した。Diederich-Fornaess指数に対する制約不等式を抽象Levi平坦面に対し証明した。二重円板上の正則関数でフックス群の対角作用で不変なものについて、有界ならば定数という意味でのリュービル性を、エルゴード理論を用いず多重ポテンシャル論により証明した。またそのような不変な正則関数を積分変換により明示的に構成する方法を見出した。

研究成果の概要(英文)：This research project focused on Levi-flats, manifolds foliated by complex manifolds. Combining ideas from complex analysis, theory of dynamical system, and differential geometry, we obtained following results: We improved known curvature restrictions for hypothetical Levi-flats in complex projective planes. We proved an inequality for the Diederich-Fornaess index on abstract Levi-flats. We gave potential theoretic proof for non-existence of bounded holomorphic functions on bi-disk invariant by the diagonal action of Fuchsian groups without relying on ergodicity theorems, and also found an explicit construction for such invariant holomorphic functions by means of integral transformations.

研究分野：複素解析幾何学

キーワード：レビ平坦曲面 複素解析幾何 多変数関数論 葉層構造論 微分幾何学 ポテンシャル論 エルゴード理論 国際情報交換

1. 研究開始当初の背景

多様体上の多変数関数論における重要な未解決問題に、Cerveau 予想、一般化 Levi 問題がある。Cerveau 予想は、複素射影平面内の Levi 平坦面の非存在を予想するものであり、「複素射影平面上の特異正則葉層が例外型極小集合（フローに対するリミット・サイクルの類似）をもたないであろう」という力学系理論における未解決問題に由来する予想である。他方の一般化 Levi 問題であるが、本研究では、領域の正則凸性を導くような境界の幾何学的性質を問う問題と定式化する。複素ユークリッド空間上の領域に対しては、境界の Levi 擬凸性が必要十分条件である(岡、~1950 年代)。しかし、多様体内の領域に対しては、Levi 擬凸性は必要条件だが、十分条件とはならない (Grauert、~1960 年代)。特に、境界が Levi 平坦のとき、正則凸性を特徴付けるような幾何学的な必要十分条件は未だ分かっていない。

これらの問題に共通する困難は、Levi 平坦面の囲む領域において、正則関数を構成するための解析手法が不十分な点にある。強擬凸境界の領域に対して有効な基礎理論は、ディーバー方程式の L^2 理論として確立している (Kohn, Hörmander ら、~1970 年代)。しかし、Levi 平坦面が囲む領域のように正則円板が境界に含まれる状況では、基礎理論を容易には適用できない。擬凸領域の多重ポテンシャル論的な量である Diederich-Fornaess 指数 (以下、DF 指数) を組み合わせると、解析を行うことはできる (Kohn 1999, Berndtsson & Charpentier 2000) が不十分な結果しか得られない。

2. 研究の目的

以上の状況において、研究代表者は、DF 指数の研究を 2013 年度に開始し、弱擬凸領域一般に対する DF 指数の制約不等式 (Fu & Shaw 2015, 足立 & Brinkschulte 2015) や、Levi 平坦面の囲む領域における DF 指数の CR 幾何学的な定式化 (足立 2015) という結果を得た。

この後者の結果が本研究の着想となっている。(足立 2015) において、DF 指数と、Levi 平坦面の持つ幾何構造である Levi 葉層の調和測度に関する力学系理論的指数との間の定量的関係が示唆された。そこで、既存の Cerveau 予想のアプローチにおいては、DF 指数に基づく解析が主要な困難となっているが、この DF 指数を力学系理論的に解釈し、類似した指数に置き換えることで、Cerveau 予想への有効なアプローチが得られるのではないかと考えた。この点が、本研究開始時点の第 1 の研究目的であった。

(足立 2015) においては、DF 指数と Levi 平坦面の正則法束の曲率の関係も明らかとなった。正則法束が Levi 葉層方向に正曲率を持てば、領域は正則凸である (Brunella 2008) ことが知られている。つまり、強擬凸境界においては正定値である Levi 形式が領

域の正則凸性を導くが、Levi 形式が退化した Levi 平坦面の囲む領域においては正則法束の正定値な曲率形式が正則凸性を導くのである。そこで、Levi 葉層の正則法束が半正曲率を持つ場合にも、適切な高次の曲率概念を用い、いわば高次の DF 指数を導入することで、一般化 Levi 問題の解決への指針が見いだせるのではないかと考えた。この点が、第 2 の研究目的であった。

3. 研究の方法

研究を進めるにあたっては、閉リーマン面上の正則円板束における事例研究を指針とした。上記の研究目的を達成するため、正則円板束の持つ、多変数関数論的性質、Levi 葉層の力学系理論的性質、正則法束の微分幾何学的性質、これら三種類の性質を照らし合わせながら、Cerveau 予想や一般化 Levi 問題へのフィードバックが可能な一般論が見いだせないか研究を行った。

閉リーマン面上の正則円板束を、研究対象として選んだ理由は 2 つある。正則円板束はスタイン性を持つような Levi 平坦面の囲む領域の典型例として知られ、1980 年代以来、Diederich-大沢、Barrett、Brunella らによって多変数関数論的性質が調べられてきている。これらの知見を足掛かりに研究が行えるであろう。また、研究の背景で述べた通り、研究の主要な困難は、Levi 平坦面の囲む領域上の正則関数を調べるための一般的な手法が不足している点にある。この点、正則円板束は、葉層構造論、タイヒミュラー空間論等の文脈において、極めて詳しく調べられている研究対象であり、周辺分野の知見を活用して、一般的な手法の欠如を克服できる可能性がある。実際、研究は周辺分野の知見を活用しながら進めることとなった。

このような状況から、正則円板束に関係する周辺分野の情報を効率的に収集し、周辺の研究者と議論を行うことが、研究計画遂行のために必要であった。本科研費を活用して、関連分野の研究会への参加や、研究者の招聘を積極的に行うことにより、多くの有益な情報、知見を得ることができた。特に、以下の国際研究集会を開催・支援できたことが、研究遂行上、有益であった：

- Analytical aspects of the $\bar{\partial}$ -equation (2015 年名古屋大学にて、Anne-Katrin Herbig 氏と共同開催)
- RIMS 共同研究 (グループ型) Topology of pseudoconvex domains and analysis of reproducing kernels (2017 年京都大学にて、大沢健夫氏と共同開催)
- Young Mathematicians Workshop on Several Complex Variables (2014 年韓国・浦項工科大学、2015 年中国・同済大学、2016 年東京大学、2017 年中国・首都師範大学にて、日中韓の若手研究者による組織委員会で開催)

4. 研究成果

(1) 非存在が予想されている複素射影平面内の Levi 平坦面が仮に存在した場合に、Levi 平坦面の総実 Ricci 曲率が下からの制約を受けることが、微分幾何学的手法により知られていた (Bejancu-Deshmukh 1996)。この下からの制約の改善に、微分幾何学的手法と多変数関数論的手法を組み合わせることで成功した。特に武内の不等式について、Levi 平坦面の正則法束を用いた微分幾何学的な解釈も与えた。DF 指数に関する解析の困難から、Cerveau 予想の解決には至っていないが、Cerveau 予想の状況で利用可能な微分幾何学的な材料は詳しく調査できた。本研究は、Judith Brinkschulte との共同研究である。足立が微分幾何学的な考察を、Brinkschulte が多変数関数論的手法による解析を担当した。本研究結果をまとめた論文は、学術雑誌 *Annales de l'Institut Fourier* に掲載 (雑誌論文③) された。また、多変数関数論葉山シンポジウム等での報告を行った。

(2) 前述の DF 指数に対する大域制約 (Fu & Shaw 2015, 足立 & Brinkschulte 2015) は、弱擬凸領域に対して証明されていた。一方、Levi 平坦面の囲む領域に対し、DF 指数は境界の Levi 平坦面の CR 幾何学的情報のみで決定される (足立 2015) ことが分かっていた。これらを踏まえ、DF 指数に対する大域制約をコンパクト Levi 平坦 CR 多様体に対し一般化することを試み、簡明な証明を与えることに成功した。本研究結果をまとめた論文は、2014 年 8 月に開催された研究集会 KSCV10 の論文集に掲載 (雑誌論文②) された。また、イタリアにおける研究集会 CR Geometry and PDEs 等での報告を行った。

(3) 種数 2 以上の閉リーマン面に対し、普遍被覆のデッキ変換から得られる基本群の $PSL(2, \mathbb{R})$ 表現を用いて、そのリーマン面上に標準的な正則円板束をたてることができる。 (Diederich-大沢 1985) によれば、この標準的な正則円板束は 1-凸であり、正則関数を豊富に所有する。力学系理論における知見である双曲閉曲面上の測地流のエルゴード性 (Hopf 1936) を用いれば、この標準的な正則円板束上には有界な非定数正則関数が存在しないことが従う。力学系理論的な側面と多変数関数論的な側面の関係を探るため、この事実に対し、多変数関数論的な別証明を試みたところ、(Hopf 1936) を用いず、DF 指数と多重ポテンシャル論の論法を組み合わせることで別証明が得られることが分かった。本研究結果の発表にあたっては、この証明の枠組みを、次次項(5)における Grauert チューブに対し適用するという形で論文をまとめた。この論文は、2017 年 7 月に開催された研究集会 KSCV12 の論文集への掲載が決定した (雑誌論文①)。

(4) 前項(3)で述べた標準的な正則円板束上の正則関数の豊富な存在は、前述の通り (Diederich-大沢 1985) の研究から従う。しかし、その証明は Grauert の定理に依存するもので構成的ではない。また、この正則円板束上の正則関数は、二重円板上の正則関数で、デッキ変換の対角作用で不変なものと同視できるが、保型形式論における先行研究に利用可能なものは見当たらなかった。そこで、ベキ級数による不変正則関数の直接構成を試み、底空間の閉リーマン面の標準環から積分変換により不変正則関数を直接構成する方法を見出した。その系として、前項(3)で述べた非定数有界正則関数の非存在性のさらなる別証明が得られ、さらに、ディーバー方程式の L^2 理論を用いた解析では解けなかった、すべての重み付き Bergman 空間に属するという意味での緩増大度の正則関数の存在性が肯定的に解決された。本研究結果をまとめた論文は、プレプリントサーバで公開する (その他: プレプリント①) とともに、学術雑誌に投稿中であり、報告書執筆時点では、査読コメントを受けて、可読性を改善した改訂版を作成中である。日本数学会函数論分科会における特別講演、カタール、韓国、アメリカ、シンガポール等で開催された研究集会での報告を行った。

(5) 前項(4)で用いたベキ級数による不変正則関数の直接構成手法が、他の具体例の解析においても適用可能かどうか研究を行った。その結果、閉双曲曲面の最大半径の Grauert チューブと呼ばれる正則円板束に対しても、双曲ラプラシアン固有関数を解析接続して得られる正則関数の解析手法として応用可能であることが分かった。特に、この Grauert チューブにおいても、すべての重み付き Bergman 空間に属するという意味での緩増大度の正則関数の存在性が肯定的に解決された。本研究結果の一部は、前項(3)で述べたように、(3)の研究結果と合わせ発表済みである。残りの研究結果は、本報告執筆時点で、論文にまとめているところである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① M. Adachi, “On a hyperconvex manifold without non-constant bounded holomorphic functions”, *Geometric Complex Analysis*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics に掲載決定, 査読有, arXiv:1804.0956 (2018) にてプレプリント入手可能.
- ② M. Adachi, “A CR proof for a global estimate of the Diederich-Fornaess index of Levi-flat real

hypersurfaces”, *Complex Analysis and Geometry*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **144** (2015) 41-48. 査読有.

DOI: 10.1007/978-4-431-55744-9_2

- ③ M. Adachi and J. Brinkschulte, “Curvature restrictions for Levi-flat real hypersurfaces in complex projective planes”, *Annales de l’Institut Fourier* **65** (2015), 2547-2569. 査読有.
DOI: 10.5802/aif.2995

[学会発表] (計 56 件)

- ① 足立真訓, 「Weighted Bergman spaces of domains with Levi-flat boundary」, 2017 年度多変数関数論冬セミナー, 2017 年.
- ② M. Adachi, “Weighted Bergman spaces of domains with Levi-flat boundary”, RIMS 共同研究 (グループ型) Topology of pseudoconvex domains and analysis of reproducing kernels, 2017 年.
- ③ M. Adachi, “Weighted Bergman spaces of Levi-flat domains: two case studies”, AMS Fall Western Sectional Meeting, 2017 年.
- ④ M. Adachi, “Weighted Bergman spaces of Levi-flat domains: two case studies”, Mini-workshop on Complex Analysis and Geometry at University of Singapore, 2017 年.
- ⑤ 足立真訓, 「レヴィ平坦面上の関数論: 平坦円周束における事例研究」, 日本数学会関数論分科会特別講演, 2017 年.
- ⑥ 足立真訓, 「閉リーマン面上の正則円板束のベルグマン核について」, 複素領域における関数方程式とその周辺, 2017 年.
- ⑦ M. Adachi, “Weighted Bergman spaces of Levi-flat domains: two case studies”, GAIA Workshop on Complex Analysis, 2017 年.
- ⑧ 三松佳彦・足立真訓・小川竜, 「Levi-平坦境界と Levi-葉層について」, 接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺, 2017 年.
- ⑨ M. Adachi, “Weighted Bergman spaces of Levi-flat domains: two case studies”, Analysis and geometry in several complex variables II, 2017 年.
- ⑩ 足立真訓, 「極小集合予想への多変数関数論的アプローチ」, 葉層構造の幾何学とその応用, 2016 年.
- ⑪ M. Adachi, “Weighted Bergman space of Levi-flat domains: two case studies”, Seminar on Several Complex Variables at Academia Sinica, 2016 年.
- ⑫ M. Adachi, “Curvature restrictions for Levi flat hypersurfaces in projective planes”, HAYAMA Symposium

on Complex Analysis in Several Variables XVIII, 2016 年.

- ⑬ M. Adachi, “The Diederich-Fornaess index of Levi-flat manifolds”, CR Geometry and PDEs - VII, Dedicated to the memory of Giuseppe Zampieri, 2016 年.
- ⑭ M. Adachi, “The Ohsawa-Sibony embedding and the Diederich-Fornaess index”, Oberseminar Geometrie, Topologie und Analysis at Universität zu Köln, 2015 年.
- ⑮ M. Adachi, “On a global estimate of the Diederich-Fornaess index of Levi-flat real hypersurfaces”, Séminaire d’Analyse et Géométrie at IMJ-PRG, 2015 年.
- ⑯ 足立真訓, 「Levi 平坦面の Diederich-Fornaess 指数の大域評価の CR 幾何的証明」, 日本数学会幾何学分科会一般講演, 2015 年.
- ⑰ M. Adachi, “Curvature restrictions for Levi-flat real hypersurfaces in complex projective planes”, Analytical aspects of the \bar{d} -equation, 2015 年.
- ⑱ 足立真訓, 「複素射影平面内のレヴィ平坦面の曲率制約について」, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 2014 年.
- ⑲ 足立真訓, 「Levi 平坦実超曲面の幾何への関数論的アプローチ」, 第 61 回幾何学シンポジウム, 2014 年.

[その他]

プレプリント

- ① M. Adachi, “Weighted Bergman spaces of domains with Levi-flat boundary: geodesic segments on compact Riemann surfaces”, 投稿中, arXiv: 1703.08165

ホームページ等

<https://wpp.shizuoka.ac.jp/masanori-adachi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

足立 真訓 (ADACHI, Masanori)
静岡大学・理学部・講師
研究者番号: 30708392

(2) 研究協力者

Judith Brinkschulte
Universität Leipzig・
Mathematisches Institut・
Wissenschaftlicher Mitarbeiter