

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 元年 9 月 12 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2018

課題番号：26800059

研究課題名(和文)ハミルトン力学系の特殊解とその近傍の力学系の解明

研究課題名(英文) Research on particular solutions and dynamics around them for Hamiltonian systems

研究代表者

柴山 允瑠 (Shibayama, Mitsuru)

京都大学・情報学研究科・准教授

研究者番号：40467444

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：ポテンシャル系においてエネルギー曲面上で、ポテンシャル関数が特異点を持つ場合に測地線型変分構造の峠点として得られる弱解について特異点を通過する回数の評価を得た。

微分ガロア理論を用いて、制限n体問題の非可積分性を証明した。

また、変分法により3体問題の特別な場合である平面Sitnikov問題における与えられた記号列を実現する軌道の存在を示した。同時に多様な周期軌道の存在も示している。OrtegaやOffinの結果と合わせることで、得られた周期軌道は全て不安定であることがわかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ハミルトン系において与えられたエネルギー面に周期解が存在するかという問題は活発に研究されてきた。特にエネルギー面がコンパクトでない場合として、ポテンシャル関数が特異点を持つポテンシャル系の解の持つ特異点の個数の最適な評価を与えた。制限n体問題の非可積分性の証明は、ポアンカレが非常に強い仮定のもとでなされて以来、新たな証明はなかった。本研究により、微分ガロア理論を用いた新たな証明が与えられた。特に、パラメータは任意に固定して良いという意味で、仮定を弱められている。変分法による特殊解の存在証明は8の字解の発見以来大きく発展している分野で、その中で記号列の変分法による実現は新たな展開を示している。

研究成果の概要(英文)：We estimate the number of singularities which weak solutions can have.

We proved the non-integrability of the restricted n-body problem.

We show the existence of solutions realizing given symbolic sequences using the variational methods. Obtained periodic solutions are shown to be unstable by applying results by Ortega and Offin.

研究分野：ハミルトン力学系

キーワード：力学系 非可積分性 変分法 微分ガロア理論

1. 研究開始当初の背景

ハミルトン系において、どのような条件のもとでエネルギー曲面上に周期解が存在するかという問題は古くから活発に研究されてきた。その中で最も大きな問題であった Weinstein 予想は Viterbo や Hofer により 1980 年代に解決された。

エネルギー面がコンパクトでない場合は、まだよくわかっていない。ポテンシャル系だとポテンシャル関数が特異点を持つ場合は、エネルギー面はコンパクトでない。その場合は、田中和永氏らにより、Jacobi-Maupertuis 軽量を変形した変分構造の峠点として得られる弱解について特異点を通る回数について評価が得られていたが、ケプラー問題など解ける場合を適用させると、まだその評価は最適ではないと予想された。

一方、制限 3 体問題の非可積分性の証明は、ポアンカレが非常に強い仮定のもとで制限 3 体問題の非可積分性を示して以来、新たな証明はなかった。ポアンカレの結果は、質量パラメータに関しても解析的に依存するような第一積分の非存在を示したもので、それが「3 体問題は解けない」と言われる元になったものであるが、質量パラメータを固定したもとで非可積分性については主張していない。3 体問題については、ラグランジュ解やオイラー解に沿った変分方程式が Gauss の超幾何方程式に変換できるため、Morales-Ramis 理論が適用でき系の非可積分性が近年証明されている。しかし、制限 n 体問題はそのような特殊解がないので、解析がさらに困難であった。

変分法による特殊解の存在証明は 8 の字解の発見以来大きく発展してきており、多くの周期解の存在が証明された。次の課題として、周期解以外の特殊解を求めることが考えられる。特に、3 体問題の特別な場合である Sitnikov 問題は、そのモデルの単純さにも関わらずカオス的な振る舞いをすることが Sitnikov, Alekseev, Moser らにより示されている。

2. 研究の目的

特異点を持つポテンシャル系において、変分法により得られるエネルギー面上の弱解が特異点を持つ回数の評価をより精密にし、最適な評価を得る。

制限 n 体問題の非可積分性を固定したパラメータのもとで証明する。

変分法により新たな周期解の存在を証明する。周期解だけでなく、別の特徴的な解の存在を示す。また、それらの近傍を解析し安定性を明らかにする。特に、平面 Sitnikov 問題において多様な軌道の存在を示す。

3. 研究の方法

2000 年の 8 の字解の発見以降作用積分に関して発展してきた特異点を持つ軌道に対する評価の手法を Jacobi-Maupertuis 軽量の変形版の汎関数に適用できる形にし、評価の精度を上げる。制限 n 体問題に特殊解が存在するように、複素化とスケールリングを行う。そのもとで、特殊解を見出し、その変分方程式を解析し、微分 Galois 理論を応用することで非可積分性を証明する。平面 Sitnikov 問題に変分法を応用して、様々な解を得る。Ortega や Offin の理論を応用して、得られた解の安定性を調べる。

4. 研究成果

特異点を持つポテンシャル系において、変分法により得られるエネルギー面上の弱解が特異点を持つ回数の評価をより精密化できた。特にケプラー問題のような中心力の場合は解くことにより具体的に Morse 指数が計算可能であり、その場合の解と比較することで、最適な評価まで達していることがわかる。

n が 3 以上の場合、制限 n 体問題のほとんどの質量パラメータについて、非可積分性を証明した。

平面 Sitnikov 問題に変分法を応用し、与えられた有限記号列を実現する解を得た。また、周期記号列に対しては、周期解が存在することも示した。記号列はかなり任意に選べるので、非常に多様な軌道の存在を示したことになる。Ortega の結果を応用することで、得られた解が不安定性であることもわかった。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 6 件)

1. Y. Kajihara and M. Shibayama, Variational proof of the existence of brake orbits in

- the planar 2-center problem, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*, 39(2019), 5785-5797.
2. M. Shibayama, Variational construction of orbits realizing sequences in the planar Sitnikov problem, *Regular and Chaotic Dynamics*, 24(2019), 202-211.
 3. V Dmitrasinovic, Ana Hudomal, M. Shibayama and Ayumu Sugita, Linear Stability of Periodic Three-Body Orbits with Zero Angular Momentum and Topological Dependence of Kepler's Third Law: A Numerical Test, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 51, 315101 (2018).
 4. M. Shibayama, Non-integrability of the spacial n-center problem, *Journal of Differential Equations*, 265(2018), 2461-2469
 5. M. Shibayama, Periodic solutions for a prescribed-energy problem of singular Hamiltonian systems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*, 37 (2017), 2705-2715.
 6. M. Suvakov and M. Shibayama, Three Topologically Nontrivial Choreographic Motions of Three Bodies. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 124(2016), 155-162.

[学会発表](計 29 件)

1. M. Shibayama, Periodic solutions of a prescribed-energy problem for a singular Hamiltonian system, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications. Hyatt Regency Orlando, Florida, USA(July 2016)
2. M. Shibayama, Variational proof of the existence of the super-eight orbit in the four-body problem, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Madrid, Spain, July 2014.
3. M. Shibayama, Non-integrability criterion for homogeneous Hamiltonian systems via blowing-up technique of singularities, The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Universidad Aut'onomo de Madrid, Madrid, Spain, July 2014.
4. M. Shibayama, Non-integrability of the spatial n-center and restricted n + 1-body problem, Workshop: Hamiltonian systems, from topology to applications through analysis II, MSRI, 4 USA (November 2018).
5. M. Shibayama, Non-integrability of the restricted n-body problem, RIMS 研究集会「界面運動, 力学系に現れる漸近問題への粘性解的手法とその周辺」, 京都大学数理解析研究所 (2017 年 7 月)
6. 柴山允瑠, n 体問題の周期軌道の変分解析, 日本数学会 2016 年度年会函数方程式分科会特別講演, 筑波大学 (2016 年 3 月)
7. 山田淳二, 柴山允瑠, 一般的な相互作用力による平面三体問題の非可積分性について, 日本数学会 年会応用数学分科会, 東京工業大学 (2019 年 3 月)
8. 梶原唯加, 柴山允瑠, 変分法による平面 2 中心問題における brake 軌道の存在証明, 日本数学会 年会函数方程式論分科会, 東京工業大学 (2019 年 3 月)
9. 柴山允瑠, 平面 Sitnikov 問題における周期解とヘテロクリニック軌道について, RIMS 研究集会「力学系 -理論と応用の融合-」, 京都大学数理解析研究所 (2018 年 6 月)
10. 柴山允瑠, 平面 Sitnikov 問題における記号力学系と変分構造, 天体力学 N 体力学研究会, 国立天文台 (2018 年 3 月)
11. 柴山允瑠, 制限 n 体問題の非可積分性, 日本数学会秋季総合分科会応用数学分科会, 山形大学 (2017 年 9 月)

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

12. 柴山允瑠, ケプラー型ポテンシャル系のエネルギー固定問題における周期解の存在, 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会, 山形大学 (2017 年 9 月)
13. 柴山允瑠, 制限 n 体問題の非可積分性, 応用数理学会年会応用力学系 (2017 年 9 月)
14. M. Shibayama, Non-integrability of the restricted n -body problem, 天体力学 N 体力学研究会, 東京工業大学 (2017 年 3 月)
15. M. Shibayama, Non-integrability of the restricted n -body problem, 第 6 回「ハミルトン系とその周辺」研究集会, 京都大学 (2017 年 3 月)
16. 柴山允瑠, A perturbed Kepler problem in which there are no periodic solutions, 天体力学 N 体力学研究会, 豊橋技術科学大学サテライトオフィス (2016 年 6 月)
17. 柴山允瑠, 特異点をもつハミルトン系のエネルギー固定問題における周期解の存在, 微分トポロジーセミナー, 京都大学数学教室 (2016 年 1 月).
18. 柴山允瑠, 特異点のブローアップと標準形理論の応用による第一積分の個数の評価, 天体力学 N 体力学研究会, SMBC イベントスペース-千葉 (2015 年 12 月).
19. 柴山允瑠, 特異点をもつハミルトン系の周期軌道の変分解析, ダイナミクス研究会中野, 明治大学 (2015 年 11 月 11 日)
20. 柴山允瑠, Periodic solutions of a prescribed-energy problem for a singular Hamiltonian system, RIMS 研究集会「実領域における常微分方程式の定性的研究」, 京都大学数理解析研究所 (2015 年 11 月)
21. 柴山允瑠, 特異点をもつハミルトン系のエネルギー固定問題における周期解の存在, 京都力学系セミナー, 京都大学数学教室 (2015 年 10 月).
22. 柴山允瑠, 特異点をもつハミルトン系の周期解について, 南大阪応用数学セミナー, 大阪市立大学 (2015 年 5 月)
23. 柴山允瑠, Perturbation Theory in Celestial Mechanics, Dynamical Systems in Mathematical Physics, 京都大学数理解析研究所 (2015 年 2 月)
24. 柴山允瑠, 特異点をもつハミルトン系の周期解について, 大阪駅前セミナー, 龍谷大学大阪梅田キャンパス (2015 年 1 月)
25. 柴山允瑠, Periodic solution of a prescribed-energy problem for a singular Hamiltonian system, 冬の力学系研究集会, 日大軽井沢研修所 (2015 年 1 月).
26. 柴山允瑠, Periodic solution in the Swinging Atwood's machine, 天体力学 N 体力学研究会, SMBC イベントスペース-千葉 (2014 年 11 月).
27. 柴山允瑠, 特異点をもつハミルトン系の変分構造, 微分トポロジーセミナー, 京都大学 (2014 年 10 月)
28. 柴山允瑠, 変分法による 4 体問題の超 8 の字解の存在証明, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会函数方程式分科会, 広島大学 (2014 年 9 月)
29. 柴山允瑠, 力学系理論の応用について, スタディグループ:数理解析腫瘍生物学の確立を目指して, 新大阪ブリックビル (2014 年 8 月)

〔図書〕(計 1 件)

柴山允瑠, ハミルトン力学系, サイエンス社, 2016.

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

<https://sites.google.com/view/mitsurushibayama>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名：
ローマ字氏名：
所属研究機関名：
部局名：
職名：
研究者番号(8桁)：

(2) 研究協力者

研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。