

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 19 日現在

機関番号：14602

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800060

研究課題名(和文)高次元チューブ内を動く拡散過程の重ね合わせ

研究課題名(英文) Superposition of diffusion processes on a high-dimensional Tube

研究代表者

嶽村 智子 (TAKEMURA, TOMOKO)

奈良女子大学・自然科学系・助教

研究者番号：40598140

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：切断面が高次元球面となる高次元チューブ内を運動する粒子の運動に対して、次のような問題を考え、確率過程論の立場でモデル化し、考察を行った。チューブが収縮する場合、その収縮運動がその運動にどのように影響を与えるのか。チューブがつぶれていく状況、チューブ内の媒質が変化する状況、これらの状況の下で極限の運動は存在するのか。これらの問題に対して、確率過程の収束定理とその極限で現れる過程に対応する運動に対応する解析的な表現を具体的に得ることができた。

研究成果の概要(英文)：We considered Limit theorems for diffusion processes on a high-dimensional tube. The sequence of diffusion processes are given by direct product diffusion processes D and Y and the time changed diffusion processes where D is a one-dimensional diffusion process and Y is a skew product diffusion of a one-dimensional diffusion process R and $d-1$ dimensional spherical Brownian motion by means of positive continuous additive functional of R . We show a limit theorem for a sequence of time changed process under some assumptions for underlying measures and we also obtained concrete expressions of the Dirichlet forms corresponding to time changed processes, which may be of non-local type on a tube caused by degeneracy of the underlying measures.

研究分野：数物系科学

キーワード：収束定理 拡散過程 斜積拡散過程 ディリクレ形式 ブラウン運動 高次元チューブ

1. 研究開始当初の背景

近年、生物学・神経生物学の観点から、グラフ上の確率過程が着目されている。特に、3次元ユークリッド空間内に実現されるチューブ内を動く確率過程について、チューブの幅が狭くなった場合にどのような運動が取り出せるか、といった問題に興味を示されている。このような問題は、例えば人間の体内の血中をランダムに運動する物質が血管が細くなるとどのような動きをみせるのかという問題のモデル化として捉えることができる。

S. Albeverio と S. Kusuoka は、3次元ユークリッド空間に実現されるチューブ内を運動する確率過程を取り扱った。ここでは、チューブの側面では反射を繰り返し運動を続けていく確率過程に対して、チューブの幅が狭くなっていった場合の極限定理を概束の意味で得ている。また J. Masamune はチューブの側面の付近で媒質が変化する場合を考察し、媒質の変化が媒質内のブラウン運動にどのように影響を与えるのか半群の意味で束束定理を得ている。前者で取り扱われた運動は、確率微分方程式で表現できるものである。一方後者では、運動をディリクレ形式で捉えている。これにより、極限過程の様相が解析的な量として捉えやすくなっている。すなわちチューブの側面上の運動が明確になっている。このような解析学的なアプローチにより極限過程の様相は明確になる。実際このような手法を用いて Y. Ogura, M. Tomisaki, M. Tsuchiya は、エネルギー測度と基礎測度を同時に退化させることにより、極限過程で断面ではある超平面上でジャンプを持つ過程を取り出すことに成功し、極限過程の性質を明らかにした。

研究代表者は、先行研究にて d 次元空間における斜積拡散過程の列に対し、基礎測度の退化に伴って球面上でジャンプを有する極限過程を取り出すことに成功し、更にそこで現れる極限過程の性質(Feller 性と大域的性質)を解明した。

これらの先行研究により、チューブ内を動く粒子の運動(拡散過程)の列に対して、極限過程の存在とその性質の解明に取り組むことが可能な状況になっていた。

2. 研究の目的

断面が d 次元ユークリッド空間内の球面と同相であるような d 次元ユークリッド空間中のチューブ内を動く粒子の運動に対し、次のような問題を確率過程論の立場でモデル化して考察することを目的とした。

(1) チューブが収縮する場合、その収縮がその運動に対してどのような影響を与えるのか。

か。更に収縮が繰り返されて、チューブがつぶれるような状況下で極限の運動は存在するのか。

(2) チューブ内の媒質が変化する場合、その変化が運動にどのような影響を与えるのか。更に媒質が変化し、チューブ内の媒質が複数の層にわかれる状況下で極限の運動は存在するのか。

(3) 上記の(1)と(2)において極限の運動が存在する場合に、どのような性質を満たすのか。

3. 研究の方法

本研究では、上記で述べた断面が $d-2$ 次元の球面と同相であるような d 次元ユークリッド空間中のチューブ内を動く運動に対して次の研究方法によって研究を遂行した。

チューブの断面に現れる高次元球面の表現を得るために斜積拡散過程を用いた。ユークリッド空間上のブラウン運動は、一次元ブラウン運動の直積として表現できる一方、原点からの距離に対応する局所型確率過程(ベッセル過程)と偏角に対応する球面上のブラウン運動によっても表現できる。後者の表現では、ベッセル過程の正值加法的汎関数によって時間変更された球面上のブラウン運動を取り扱う必要がある。これは、球面の表面積が半径によって異なることからきており、このような表現は、斜積、斜積拡散過程と呼ばれている。

断面に現れる球内を運動する拡散過程を考察するために、本研究では、开区間 $(0, r)$ 上の一次元拡散過程と球面上のブラウン運動の斜積により拡散過程を取り扱う。この斜積拡散過程と一次元拡散過程の直積によりチューブ内を運動する拡散過程を表現した。

具体的に取り扱った拡散過程を説明する。

- チューブの芯からの半径 r に関する $(0, r)$ 上の一次元拡散過程
- 2次元球面であれば偏角、3次元球であれば仰俯角に対応する $d-2$ 次元球面上のブラウン運動

ここでは、先で述べたブラウン運動の斜積の表現と同様に一次元拡散過程に関する正值加法的汎関数によって、球面上のブラウン運動が時間変更される斜積拡散過程を考える。この斜積拡散過程がチューブの断面の球面に対応しており、一次元拡散過程の端点 r での境界条件がチューブの側面での境界条件を与える。

更にこの球を重ね合わせることによりチューブを構成する。すなわち、ここで取り扱う

拡散過程は上記の2つの拡散過程からなる斜積拡散過程と次の拡散過程の直積から構成される。

- チューブの長さに関する一次元拡散過程

上記で説明した3つの独立な拡散過程に対して、チューブの側面で様々な境界条件を設定した場合に対応するディリクレ形式を M. Fukushima, Y. Oshima と H. Okura の理論により、取り扱う斜積拡散過程と一次元拡散過程との直積について決定し、またチューブ内の媒質の変化に対応するモデル化を考察するために時間変更過程についても同様にディリクレ形式を決定した。これは、研究目的(1)のチューブが収縮する場合、その収縮がその運動にどのように影響を与えるのか。チューブが潰れるような状況下で極限運動は存在するのかという問いにディリクレ形式の表現により解析学的なアプローチにより極限過程の様相が明確になった。この結果により、以下で取り扱う斜積拡散過程の列が、チューブ内を運動する拡散過程がチューブの収縮、また媒質の変化により、極限で現れる確率過程が局所的でなくジャンプや消滅もあり得る確率過程へ収束することがわかる。

研究の目的(2)に挙げた収束定理に関して、チューブが収縮、媒質が変化する場合に対応した拡散過程の列の極限過程が存在するかまたその性質についてを考察するために次のような仮定の下で収束定理を得た。

チューブが収縮する場合、またチューブの側面での境界条件も変化する列を考えるため、チューブの芯からの距離を表す一次元拡散過程が定義される開区間 $(0, r)$ の r も変化し、また一次元拡散過程の特徴付けである尺度関数とスピード測度の組も変化する一次元拡散過程の列を考える。また、媒質の変化に対応する斜積拡散過程の測度と斜積拡散過程と一次元拡散過程の直積に対する時間変更に関する測度の列に対して、極限定理を得た。

特に芯の半径 r に関する一次元拡散過程の列については、様々な境界条件を取り扱うために、S. Watanabe の理論により $(0, r)$ 上の拡散過程を $(0, \infty)$ 上の広義拡散過程に拡張し、収束定理を得た。このことによりこの拡散過程の列の境界条件が必ずしも極限過程に保存されとは限らないような場合もこの収束定理により得られることとなった。

収束定理の本質的な証明に関しては、斜積拡散過程の測度や時間変更に関する測度に対応する正值加法的汎関数の収束に注意し、ま

た一次元拡散過程をブラウン運動の時間変更過程の記述により精査することにより、以下の仮定の下で収束定理を得た。

- チューブの芯からの半径
- チューブの芯からの半径に関する一次元拡散過程の尺度関数・スピード測度
- 媒質の変化に対応する時間変更に関する測度

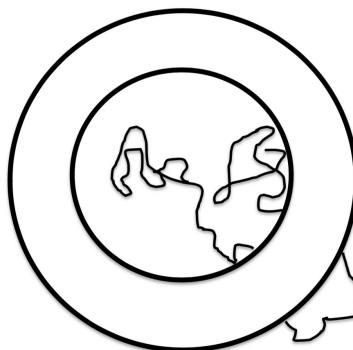
また研究の目的(3)で挙げた極限過程の性質について、収束定理に関する拡散過程の列と極限過程に対応する半群と具体的なディリクレ形式を得ることにより、チューブ内の媒質の変化がディリクレ形式を特徴づける特性量の変化として捉えられ、チューブ内の運動に対する影響を解明できた。

4. 研究成果

研究の目的と研究の方法で述べたように、研究目的であったチューブ内を運動する確率モデルの解明のためにディリクレ形式の表現、収束定理を上記の仮定の下、得た。

収束定理を得るためにまず境界条件に関する性質を探った。調和関数による変換により拡散過程の端点での状況がどのように変化するか。端点が regular と呼ばれる状態の時に拡散過程は端点も含んだ区間上の拡散過程として拡張できる。端点が regular である時に端点に滞在した時間に対応した局所時間の逆関数を考えることによって、対応する測度が現れる。その測度が調和変換によってどのように変化し、表現されるのかを論文 " Exponent of inverse local time for harmonic transformed process " にて発表した。

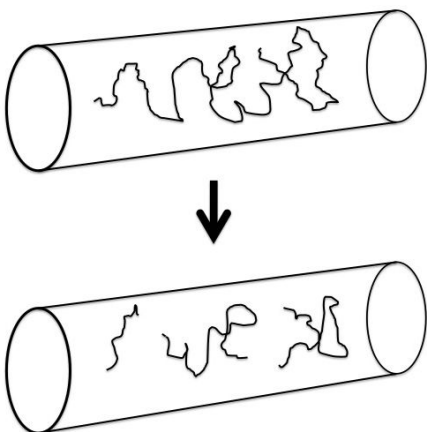
また本研究で取り扱った収束定理の極限過程の具体的な例を表現するために、下の図の様なジャンプや消滅が中心からの距離に依



存して出現する拡散過程、特にブラウン運動に対して、円環上のジャンプに対応する測度、ジャンプレート具体的な表現を得ることができ、論文 " Jump measure densities corresponding to Brownian motion on

annulus” を発表した。

これは、媒質の変化によりチューブの半径方向にジャンプを起こすような局所的でない確率過程を記述するための準備であり、チューブの切断面から観察される運動が上図のような状況をモデル化したものである。これにより、円環上でジャンプをするような確率過程をディリクレ形式で記述する場合に必要なジャンプを表す項に現れる測度の重要な具体例を得ることができた。



更に、チューブ内を運動する拡散過程が上図のようにチューブの内の媒質の変化によりジャンプや消滅を起こす場合、またチューブが収縮を繰り返し変化していく場合について収束定理を得、日本数学会 2018 年度年会にて発表した。研究の方法でも述べたが、この収束定理では、3つの仮定の下、収束定理を得た。これは、研究の目的であるチューブの収縮、媒質の変化が同時に起きたケースも含んでおり、チューブの複雑な変化にも対応した収束を包括的に得ることができた。極限過程の具体的な表現と共に、現在、論文 “ Convergence of diffusion processes in a tube ” にまとめ、投稿準備中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 2 件)

T. Takemura, M. Tomisaki,
Exponent of inverse local time for harmonic transformed process, Ann. Reports of Graduate School of Humanities and Sciences, Nara Women's University, 査読有, vol.31 (2016) 127-138
<http://hdl.handle.net/10935/4204>

T. Takemura,
Jump measure densities corresponding to Brownian motion on annulus, Ann. Reports of Graduate School of Humanities and Sciences, Nara Women's University, vol.33 (2018)

123-132

<http://hdl.handle.net/10935/4681>

〔学会発表〕(計 3 件)

T. Takemura

Exponent of Levy processes corresponding to inverse local time for harmonic transformed diffusion processes, World Congress in Probability and Statistics, 2016 年 7 月 15 日, Fields institute, Toronto

T. Takemura

Convergence for diffusions in balls whose diameter changes, KWMS International Conference 2017, 2017 年 6 月 23 日, POSTECH in Pohang, Korea

嶽村 智子

Convergence of diffusion processes in a tube, 日本数学会 2018 年度年会, 2018 年 3 月 19 日, 東京大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

嶽村 智子 (TAKEMURA, Tomoko)
奈良女子大学・研究院自然科学系・助教
研究者番号: 40598140

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

(4) 研究協力者