

平成30年6月1日現在

機関番号：32644

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800062

研究課題名(和文)可積分系理論とトロピカル曲線の研究

研究課題名(英文)Study of integrable systems and tropical curves

研究代表者

岩尾 慎介(Iwao, Shinsuke)

東海大学・理学部・講師

研究者番号：70634989

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：トロピカル幾何学とは、通常の掛け算と足し算( $\times$ と $+$ )の代わりに、足し算と「大きい数をとる演算」( $+$ と $\max$ )を採用した幾何学のことである。トロピカル幾何学は、可積分系方程式と呼ばれる特殊な微分方程式の構造の研究と相性が良いことが知られており、両者の関係の本質的な意味を調べることが本研究の主眼である。本研究において得られた成果は主に以下の2つである。1. 相対論的戸田方程式の初期値問題の解法を利用して、「旗多様体の量子K理論」と特殊対称多項式の関係性を明らかにした。2. 超離散(トロピカル)KP方程式の代数的解法を用いて、組み合わせ論定理への応用を与えた。

研究成果の概要(英文)：The tropical geometry is a kind of geometry where the usual multiplication and addition are replaced with the addition and maximum. Since it has been known that the tropical geometry admits good applications to the study of integrable system theory, the main aim of this research is to study their essential relations. The main results of this research are as follows: 1. The relation between the "quantum K-theory" of the flag variety and some special symmetric polynomials are clarified by using the algebraic method to the relativistic Toda equation. 2. The application of the tropical KP equation to various combinatoric problems of Young tableau is obtained.

研究分野：可積分系

キーワード：トロピカル幾何学 対称多項式 Young盤の組み合わせ論 旗多様体の量子K理論

## 1. 研究開始当初の背景

(1) トロピカル幾何学と可積分系理論の研究は00年代後半から認識され始めていた。当時は、超離散可積分系と呼ばれる特殊な発展方程式の代数的解法 (Krechever construction) と、そのトロピカル類似の構成が大きな成果であった。

これは、代数幾何学側から見れば非特異曲線を用いた方法とみることができる一方、数理物理学的には周期境界条件の下で方程式を解いた、ということができる。その図式でいうと、数理物理学でいう「解放端条件」に対応するのは、代数幾何学の特異曲線であることが知られている。きわめて安直に考えれば、解法端条件で離散可積分系の解法を考えれば、そのトロピカル類似として「特異トロピカル曲線」なるものが登場するはずである。トロピカル曲線の特異版は当時知られておらず、また単純な代数幾何学な類似をたどるだけでは満足いく結果が得られるべくもない状態であったが、そこに「可積分系の解放端条件」という視点を持ち込むことは、意義のあるものと思われた。

(2) 旗多様体の量子コホモロジー環が戸田方程式の保存量と関係を持つという事実は、古典可積分系理論と「量子幾何学」との不思議な関係を示す一つの重要な例である。この関係については Gromov-Witten 不変量の物理学的意味や、ミラー対称性の文脈から説明が試みられているが、未だ完全には理解されていないというのが実際のところであると思われる。

## 2. 研究の目的

(1) 特異代数曲線の自然なトロピカル化を構成すること。および、それに付随する種々の代数構造を研究すること。その際、純粋な代数幾何学的手法に加え、可積分系のアイデアを用いることが本研究の最大の主眼である。

(2) 可積分系の全正構造 (=totally positive structure) に着目し、その性質を明らかにすること。このことには、旗多様体の幾何学、対称多項式の理論、全正行列 (Totally positive matrices) の理論、クリスタル (crystal) の理論、および組み合わせ論を含んだ、古典可積分系・量子可積分系の広範な内容にかかわると期待される。

## 3. 研究の方法

(1) 可積分系の全正構造にかかわる研究に着目し、重点的に調査・情報収集を行った。その過程で、旗多様体の量子コホモロジーには、K-理論一般化が存在することを知に至った。量子 K-理論の大まかな仕組みと、旗多様体との関係、および量子相対論的戸田方程

式との関係について、重点的に研究を行った。

(2) 基本的な組み合わせ論の道具である Young 盤と可積分系との関係はある程度知られていたが、2015年の寛・片山による超離散 KP 方程式 (Tropical KP equation) と jeu de taquin slide との関係 (引用文献①) の発見により、さらに高度な組み合わせ論へのトロピカル数学の応用が存在すると期待されるようになった。この定理、およびその周辺に関する内容について、研究を行った。

## 4. 研究成果

(1) K-理論版 Peterson 同型の構成について。種々の代数多様体の Gromov-Witten 不変量や量子コホモロジーの研究は、多くの物理学・数学にまたがる興味深い問題を提供している。本研究では、旗多様体の「量子 K-理論」と affine Grassmannian の K 理論の間の環の同型を構成した。これは、旗多様体の量子コホモロジー環と affine Grassmannian のホモロジーとの間の環の同型を示した「Peterson 同型の」K-理論版ということができる。

重要なことは、この過程で「相対論的戸田方程式の初期値問題の解法」が活用されたということである。戸田方程式の代数的解法は、一見、旗多様体の量子幾何とはあまり関係が無さそうな「古典的な」物である。しかし、この結果により実際には最新の数学に通じる興味深い対象であることが分かった。この結果は、純粋な量子幾何学の文脈とは独立な手法により導かれたものであり、古典可積分系・量子幾何学双方にとって有意義なものであると考える。

さらに本研究によって、旗多様体の量子 K 理論の中で、「シューベルト多様体」と呼ばれるきれいな部分多様体の定めるクラスが、affine Grassmannian の K 理論の中では「dual Grothendieck 多項式」に対応することが分かった。表には見えてこないが可積分系の全正構造 (=tropical な構造) の考えも用いられている。この結果は、2018年に発表された論文、T. Ikeda, S. Iwao and T. Maeno “Peterson Isomorphism in K-theory and Relativistic Toda Lattice” に掲載されている。

(2) 超離散 KP 方程式と Young 盤の組み合わせ論の関係について。

旗多様体の幾何学と Young 盤の組み合わせ論の間には重要な関係があることは古くから知られている。本研究では、超離散可積分系 (=tropical 可積分系) の理論を用いて Young 盤組み合わせ論を考察した2つの先行研究 (引用文献①&②) の内容を発展させ、Young 盤の組み合わせ論の理論の中でも難解な「形同値類」の概念について、新しい定義を与え、組み合わせ論的に重要な「形同値定理 (Shape Change Theorem)」の別証明を与え

た.

この超離散可積分系を用いた方法によると、形同値定理とは、よく知られた別の定理「整化の一意性(uniqueness of rectification)」の双対的な概念であることが、一目瞭然となる。この手法は Young 盤の組み合わせ論の文脈においても、新たな視点をもたらすと考えられる。トロピカル数学と可積分系の理論との関係においても、実際の問題に有効であることを示す一つの好例であると考え。この結果は現在 Journal of Integrable Systems に投稿中である。(引用文献③)

(3) 離散戸田方程式の特殊解としての dual  $\beta$ -Grothendieck 多項式.

近年、古典可積分系・量子可積分系の文脈から、Grothendieck 多項式と呼ばれる特殊な対称多項式が自然に現れることが報告されている(引用文献④)。この多項式は、元々は旗多様体の K 理論を考察するときに導入されたものである。本研究では、基本的な古典可積分系である「離散戸田分子方程式」の一つが、特殊解として dual  $\beta$ -Grothendieck 多項式を持つことを示した。離散可積分系研究のごく初期から知られているこの方程式から、このような K 理論的な対象が自然に導出されることは驚きであった。この結果は、Grothendieck 多項式が広く数学分野に遍在するものであることを示唆していると考え。

(4) dual Grothendieck 多項式の明示公式の証明.

Dual Grothendieck 多項式とは Grothendieck の対称多項式(実際には対称関数)の「双対」なのであるが、実際に知られている「dual Grothendieck 多項式」が本当に元の対称多項式と双対の関係にあるかを証明するのは、簡単ではなかった。本研究では、「Boson-Fermion 対応」と呼ばれる手法と、大学初年次の線形代数のみを用いて、その事実のきわめて平易な別証明を与えた。この過程で古典可積分系の基本テクニックである Boson-Fermion 対応が活躍する事実は、K 理論版特殊対称多項式の今後の研究に大きな道筋を与えるものであると考える。

<引用文献>

① Y. Katayama and S. Kakei “Jeu de taquin slide and ultradiscrete KP” Reports of RIAM Symposium, 26A-S2 巻, 2015, 133-138

② M. Noumi, Y. Yamada “Tropical Bobinson-Chensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions” Representation theory of algebraic groups and quantum groups, Soc. Japan Tokyo, 40 巻, 2004, 371-442

③ S. Iwao “Tropical integrable systems and Young tableaux: Shape equivalence and Littlewood-Richardson correspondence” Submitted to Journal of Integrable Systems

④ K. Motegi and K. Sakai “Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials” Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 46 巻, 2013, 355201

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

① T. Ikeda, S. Iwao and T. Maeno, “Peterson Isomorphism in K-theory and Relativistic Toda Lattice,” International Mathematics Research Notices (オンラインジャーナル), rny051 番, (2018), DOI: <https://doi.org/10.1093/imrn/rny051> 査読あり

② S. Iwao and H. Nagai, “The discrete Toda equation revisited: dual  $\beta$ -Grothendieck polynomials, ultradiscretization and static solitons,” Journal of Physics A, 51 巻, (2018), DOI: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/aaae30> 査読あり

③ 岩尾 慎介, 「ボゾンフェルミオン対応の基礎と線形代数のみから双対 Grothendieck 多項式の行列式表示を導く」 To be appeared in RIMS 講究録, 査読無し

[学会発表] (計 7 件)

① 岩尾 慎介, 「旗多様体の量子 K 理論と相対論的戸田方程式」 RIMS 研究集会 2017 可積分系の数理論と応用, 2017 年 9 月 5 日, 京都大学

② 岩尾 慎介, 「相対論的戸田方程式の lax 行列と超離散戸田方程式の負の解」 研究集会・数理論科学の広がり, 2017 年 8 月 21 日, 島根可積分系研究会

③ S. Iwao, 「Perron root の摂動とトロピカル固有値問題」 RIMS 研究集会 2016 可積分系数理論の現状と展望, 2016 年 9 月 6 日, 京都大学

④ S. Iwao, 「K-theoretic analog of the Peterson isomorphism and the relativistic Toda equation」 Infinite Analysis 16 summer school, 2016 年 8 月 31 日, 名古屋大学

⑤ S. Iwao, 「Totally non-negativity, singular curves and Kostant-Toda hierarchy」Workshop Topics on tropical geometry, integrable systems and positivity, 2015年12月22日, 青山学院大学

⑥ 岩尾 慎介, 西山 享, 小川 竜, 「Kostant-Toda 階層, Totally nonnegative matrix と特異曲線」日本数学会 2015年度秋季総合分科会, 2015年9月13日, 京都産業大学

⑦ S. Iwao, 「Tropical singular curves and Classical integrable systems」Students' Workshop on Tropical and Non-Archimedean Geometry, 2015年8月5日, レーゲンスブルク大学, ドイツ

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岩尾 慎介 (IWA0, Shinsuke)  
東海大学・理学部数学科・講師  
研究者番号 : 70634989