

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 25 日現在

機関番号：17601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800071

研究課題名(和文)天文現象における自己重力流体の運動の数学解析

研究課題名(英文) Mathematical analysis of motions of some self-gravitating fluids from astronomical phenomena

研究代表者

梅原 守道(UMEHARA, MORIMICHI)

宮崎大学・工学部・准教授

研究者番号：40532164

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：天体内部などの天文現象を流体の基礎方程式を用いてモデル化し、数学解析を行った。主要な成果は次の二つである。(1)天体を構成するガスを理想気体とし、その運動を n 次元(n は3以上の整数)とした場合に、滑らかで大きさに制限のない初期値から、長時間の滑らかで安定した運動(解)が得られるための十分条件を得た。(2)先の設定に加えて天体表面で熱の出入りがあるモデルを定式化し、解の挙動を考察した。この問題は期間中の完全解決とはならなかった。

研究成果の概要(英文)：Some astronomical phenomena, stellar structure, and so on, was mathematically analyzed by modeling them on the basis of the equations of fluid mechanics. Our main two results are: (1) On the case that the star is composed by a ideal gas and its motion is spacially n -dimensional (n is greater than three), we obtained a certain sufficient condition guaranteeing the long-time existence of the solution of the problem with suitable smoothness and stability, from the initial data with suitable smoothness and without the restriction of the size. (2) We considered an another problem under the situation of (1), in which an additional phenomenon was admitted: the flow of heat through the surface of the star. However on this problem we could not attain the complete result during this study period.

研究分野：数物系科学

キーワード：天体の連続体モデル 圧縮性粘性流体 自己重力 自由境界問題 球対称運動

1. 研究開始当初の背景

本研究は、宇宙における天文現象を流体の方程式で記述し、それを数学的に解析することで天文現象の数理的な構造を明らかにしようとするものである。観測技術の進歩により、宇宙や天体の姿が身近に、詳細に捉えられるようになってきた。観測される現象は物理により説明付けられるが、それに加えて数学により現象の構造が明らかにされるならばより強固な理論体系が組まれることになる。その意味で現象解析に数学は不可欠といえるが、具体的な現象を念頭においた数学の研究はあまりなされていない。この現状を鑑み、本研究では天体現象に焦点を当て、現象解析のための数学理論や解析手法の構築を目指す。

天体(恒星)は、水素やヘリウムなどの気体からできており、それらの運動は流体の基礎方程式(ナビエ・ストークス方程式など)を用いて記述される。流体の基礎方程式は、応用の面では有用さが確認されており信頼のおける方程式とされてきているが、この方程式に基づいて天文現象を記述するとき、天文現象が複雑な物理過程を含むため解析は困難になる。天体現象を強く特徴付ける要素として、「自己重力」と「自由表面」の2つが挙げられるが、この両方の要素を取り入れた流体のモデル方程式はまだ満足に解析されていない。

本研究で考察する天体モデルは、自由表面(自由境界)を持つ圧縮性かつ粘性の流体(以下「流体星」と呼ぶ)の自己重力による運動を記述する初期値境界値問題(自由境界問題)として定式化される。この問題に対して、適当な初期データを与えたときの解の存在、一意性および解の具体的な挙動(漸近挙動)などが考察の対象となる。この初期値境界値問題は時間局所的には充分一般的な設定の下で解かれており、問題の「適切性」は確立されていると言ってよい。しかし、時間漸近挙動や安定性などの解の時間大域的(タイムグローバル)な側面についてはまだわかっていないことが多く、観測との照合が期待されている点もまさにこの点であるため数学的な解明が期待されている状況であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、報告者のこれまでの流体星に対する研究をさらに発展させることである。報告者はこれまで、流体星の1次元運動と3次元球対称運動を考察してきており、運動が1次元または球対称の場合であれば、タイムグローバルも含めて問題の適切性(アダマールの意味で)については十分な結果が得られたと考えている。

いっぽう解の時間漸近挙動については、単に時間大域解を作るときよりも解の評価を精密にしていかなければならず、一般により困難な仕事になる。報告者らは、1次元の場合に

ある手法を開発し突破口を開いた。それは、初期値のサイズにかかわらず時間一様に有界な解が構成されるためのある十分条件が見つかったことである。その十分条件のもとではさらに、その解は初期値で定まるある定常状態(自明でない定常解)に時間収束することも示された。1次元のときのこの仕事を基にして、運動が3次元球対称の場合にも、1次元と同様の結果が(粗い計算によって)おおむね成り立つことが示されていた。そこで本研究では、 n 次元(n は3以上の整数)球対称のときの問題を完全な形で解決することを第一とし、第二には、そこから派生する次なる問題、すなわち、より実際の星に近い状況設定での問題に取り組み、流体星の研究を前進させることを目的とした。とりわけ、流体星の自由表面において熱が出入りするモデルの考察が重要であり、これに取り組んだ。このモデルは、境界条件に非断熱の条件(温度に関して非斉次のノイマン型条件)を採用することで実現される。圧縮性粘性流体の問題について、非断熱の境界条件の下で解の挙動が詳しく調べられたような顕著な結果はまだ無く、報告者の既存の研究も断熱の境界条件(斉次ノイマン型)によるものであった。非断熱の問題に取り組むことは、プロミネンスや太陽風など、星の表面付近における様々な現象の解析に踏み込むことになり、意義は大きい。

3. 研究の方法

研究は、報告者単独の考察を中心に進められた。すなわち、関連する文献を収集、精読し、自身のアイデアに基づいて紙面上での計算を行うことが中心である。また、他研究者との質疑応答や討論も研究の推進に欠かせないものであり、国内外の研究集会上に積極的に参加し、自身の研究成果を発表する機会を求めた。また、研究協力者(谷温之氏:慶應義塾大学名誉教授)と定期的に会合の機会を設け、討論した。

また、報告者が主催者のひとりとなり、現象解析に焦点を当てた定期研究集会「現象解析特別セミナー」を2012年に発足させていたが、それを引き続き組織し、毎年2回を定期開催した。そのような場を通じて他研究者との情報交換や討論に努めた。

本研究は、数学解析としては次のような手法をとることを基本とした。

- (1) オイラー座標系において自由境界問題として定式化されたオリジナルの問題を、質量ラグランジュ変換により固定境界上の問題(ラグランジュ座標系)へと変換した。
- (2) ラグランジュ座標系における問題の定常問題を考察し、定常解の存在や一意性、定常解の性質を調べた。
- (3) ラグランジュ座標系における時間発展の問題について、解のアプリオリ評価を

時間一様な形で導出しようとした。本研究では解をヘルダー空間で構成するため、解のアプリオリ評価としてはヘルダーノルムのものが必要になるが、それを得るためにまずは解の評価を適当なソボレフ空間において求めておき、それをヘルダー空間に埋め込むことで目標の評価を得る、といった手法をとった。(そのため、比較的高い微分階数のソボレフノルムの評価が必要となり、一般に計算は困難となる。)

- (4) (3)で得られた評価(時間に依存しない解のアプリオリ評価)を用いて、解の長時間挙動を調べた。物理的には、解は(2)で得られた定常解に時間収束することが期待されるが、その予想を厳密に証明しようとした。

4. 研究成果

本研究により次の成果が得られた。

(1) 理想気体の n 次元空間(n は3以上の整数)における球対称運動の考察において、ヘルダー空間における時間大域解の、時間によらないアプリオリ評価として、これ以上なく精密であると考えられるものを得ることに成功した。既に述べたが本研究に入る前に、3次元球対称の問題($n=3$ のケース)については試験的な計算が済んでおり、1次元のときの議論がおおむね通用しそうであることが見込まれていた。しかしながら、精密に解の評価をしようとするると3次元ならではの困難がいたるところに生じてきて、物理的にリーズナブルといえる条件(十分条件)を保持したまま解の評価を完成させることは、簡単でないということが本研究により明らかとなった。しかし同時に本研究により、その困難の克服に成功した。本研究によって、圧縮性粘性熱伝導性流体の基礎方程式系一般に通じるある本質的な特徴が捉えられたと報告者は理解した。すなわち、本研究の結果は、本研究で扱ったモデルに限った話ではなく、より一般の流体モデルに対して解析の見通しを与えうるものになると考える。この結果は、速報として国際会議を含むいくつかの会議で発表し、注目を集めた。論文としては速報を出しているが、現在フルペーパーを執筆中である。

(2) 上の設定に加えて、星の表面(境界)で熱の出入りを許したモデル、すなわち「非断熱モデル」を考察した。非断熱モデルの問題としての困難さは、次のようなところにある。定常問題においては、(1)のときと違って定常解が定常状態にならないことがまず挙げられる。また、境界での温度の値が未知数として積分方程式(定常問題の解の表現式のようなもの)の中に残ってくることが挙げられる。また、時間発展の問題においては、境界

で熱(エネルギー)が出入りすることにより系の総エネルギーが保存されなくなるため、ソボレフ空間における解のエネルギー評価で非断熱であれば容易に得られていたもの(上からの評価)ですら容易には得られなくなる。本研究では主に定常問題に取り組み、定常解のアプリオリ評価としていくつか有益なものを得るなどの成果を得たが、定常問題の完全な解決には至らなかった。また定常問題が解決しなかったため、時間発展の問題へは十分に取り組みなかった。しかしながらこの問題は現象論的に重要と考えており、今後引き続き鋭意研究していく所存である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

[1] M. Umehara, Global existence of the spherically symmetric flow of a self-gravitating viscous gas, In: Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, edited by S. Ei, S. Kawashima, M. Kimura and T. Mizumachi, 515-522, Adv. Stud. Pure Math., **64**, Math. Soc. Japan, 2015. (査読有)

[学会発表](計7件)

[1] 梅原守道, On a spherically symmetric motion of a viscous heat-conductive and self-gravitating gas, Second Workshop on Mathematical Analysis on Nonlinear Phenomena, 慶應義塾大学, January 21, 2017.

[2] 梅原守道, 自己重力粘性ガスの球対称運動について, 2016年度第3回明治非線型数理セミナー, 明治大学, Aug 31, 2016.

[3] M. Umehara, On spherically symmetric motions of a viscous heat-conducting and self-gravitating gas, The fifth China-Japan workshop on mathematical topics from fluid mechanics, Wuhan Univ., Wuhan, China, November 19, 2015.

[4] M. Umehara, On a one dimensional motion of a viscous heat-conducting and self-gravitating gas, Recent development of mathematical fluid dynamics and hyperbolic conservation laws, Nation. Inst. Math. Sci., Daejeon, Korea, March 26, 2015.

[5] 梅原守道, 粘性気体星の運動の数学解析, 現象解析特別セミナー第6回, 東京理科大学, September 5, 2014.

[6] M. Umehara, Free-boundary problem for flows of viscous heat-conducting and self-gravitating gas, International congress of mathematicians (in short communications), Coex, Seoul, Korea, August 19, 2014.

[7] 梅原守道, 自己重力粘性ガスの運動の時間大域的な存在について, 明治非線型数理 one day seminar, 明治大学, March 12, 2014.

〔その他〕

個人 Web ページ :

<http://www.cc.miyazaki.ac.jp/umehara/index.html>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

梅原 守道 (UMEHARA MORIMICHI)

宮崎大学・工学部・准教授

研究者番号 : 40532164