2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ６ 月　 １ 日現在

機関番号： ３２６４２
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2014～2016
課題番号： ２６８０００７４
研究課題名（和文） 調和ポテンシャルを伴う非線形シュレディンガー方程式の定在波の解析

研究課題名（英文） Analysis of standing waves for nonlinear Schroedinger equations with harmonic potential

研究代表者
菊池　弘明（Hiroaki, Kikuchi）

津田塾大学・学芸学部・准教授

研究者番号：００６１２２７７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）： 研究成果は2つある。一つ目の研究成果は非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動である。この方程式には、基底状態と呼ばれる特別な解がある。この基底状態より少し大きいエネルギーを持つ解の挙動を調べた。

2つ目は、一般化リュウビル・ゲルファント方程式の分岐を調べた。ここでは、特異解と呼ばれる解が存在することを示し、それを用いて、3次元から9次元以下のとき、分岐は無限個の折れ曲がりを持つことを示した。

研究成果の概要（英文）：First result I obtained is concerned with the global dynamics of solutions to nonlinear Schrodinger equations. Second one is to study a bifurcation diagram of generalized Liouville-Gelfand equations.

研究分野： 非線形偏微分方程式論

キーワード： 非線形シュレディンガー方程式　基底状態　散乱解　爆発解　一般化リュウビル・ゲルファンド方程式　特異解　分岐　モース指数

１．研究開始当初の背景

(1) 非線形シュレディンガー方程式には、散乱解、爆発解や定在波解など様々な挙動をする解が存在することが知られている。これらの大域挙動を分類する研究成果は、Kenig-Merle(2006)以降、様々な結果がある。その中で、Akahori-Kikuchi-Nawa(2012)は一般の非線形項に対して、基底状態よりも小さいエネルギーをもつ解に対して、2 つの不変集合を導入し、その一つの不変集合から出発した解は爆発し、もう一つの不変集合から出発した解は散乱することを示した。そして、それらの系として、基底状態が不安定であることを示した。

(2) リュウビル・ゲルファント方程式は古くから研究されており、様々な結果がある。その中でも、空間領域が単位球の場合は、Joseph-Lundgren(1973)により、空間 3 次元以上で９次元以下においては、分岐は無限個の折れ曲がりを持ち、10 次元以上のときには、一度も折れ曲がりを持たないことが知られている。また、1，2 次元のときは、分岐は一度だけ折れ曲がりを持つことが知られている。

２．研究の目的

(1) ① Akahori-Kikuchi-Nawa(2012) で与えた非線形項の条件を満たさない場合は、解の大域挙動はどのようになるのかを考えた。満たさないものの非線形項に対しては、すべての解が大域的に存在する例や、安定な定在波が存在する例がある。つまり、Akahori-Kikuchi-Nawa(2012 で示した解の挙動とは異なる状況があることが知られており、これらに対して、どのような条件が本質的であるかを調べることに興味がある。

② これまでは基底状態より下のエネルギーをもつ解についてのみ調べてきた。基底状態より上のエネルギーを持つ解については、Nakanishi-Schlag(2012)が、3 次元で 3 次の単純冪の非線形項に対して、解の大域挙動は 9 つの種類に分類されることを示した。ここでは、それまでに Akahori-Ibrahim-Kikuchi-Nawa(2013)などで考えてきたような 2 重冪でその一つはエネルギー臨界である非線形項に対して、基底状態より上のエネルギーを持つ解の大域挙動を調べた。

(2) 非線形項を一般的にした一般化リュウビル・ゲルファント方程式に対しては、これまでほとんど調べられておらず、この分岐について調べるのが目的であった。特に、2 次元の場合においては、非線形項にある指数により、分岐の振る舞いが変わってくることが予想されており、また、Trudinger-Moser の不等式とも関連するので、これについて解析するのは興味深いと思われる。

３．研究の方法

(1) ①　赤堀公史氏(静岡大)と山田剛氏と共同研究により、一般の非線形項に対する非線形シュレディンガー方程式の解の大域挙動について研究を進めた。Akahori-Kikuchi-Nawa(2012)では、``ビリアル等式”と呼ばれる等式に現れる汎関数と L^{2} スケーリングを用いて定義される関数の零点が一つであるという条件である。ここでは、零点が 0 個と偶数個のときにはどのようになるかを、既存の散乱の結果や、変分法を用いた基底状態の安定性に関する結果を参考にして調べた。

② 赤堀公史氏(静岡大)、Slim Ibrahim 氏(ヴィクトリア大)、名和範人氏(明

治大)と共同で基底状態より上のエネルギーをもつ解の大域挙動について調べた。これを調べるには、線形化作用素のスペクトル解析が必要になる。一般には、二重冪の非線形項に対しては、線形化作用素のスペクトルを調べるのは困難であるため、振動数をパラメータとして、十分大きい場合など特定の状況のみを考えた。そして、そのパラメータについて極限をとったときに得られる方程式を考えることにより、Nakanishi-Schlag(2012)で用いた方法が適用できるかどうかを試みた。

⑵ 一般化リュウビル方程式については、Juncheng Wei 氏(ブリティッシュ・コロンビア大)との共同により研究を進めた。まず、分岐の構造を調べるには、原点で発散する特異解の存在を調べることが重要であることが知られている。しかしながら、一般化リュウビル方程式に対しては、原点での漸近形を決めるのが自明でない。ここでは、解の増大度に関する上からの評価や解が一様に有界になる条件を考慮することで、解の漸近形の見当をつけ、それを基に、特異解を実際に構成した。

４．研究成果

⑴ ① ビリアル等式と L^{2} スケーリングを用いて定義される関数の零点が 0 個のときは、Nakanishi(2000) の既存の結果を用いることが出来、すべての解は大域的に存在し、散乱することが分かった。また、零点が偶数個のときは、基底状態が存在することが分かり、さらに、この基底状態は、Shatah(1983)による変分的な手法を用いることにより、安定な定在波があることが分かった。

② 基底状態より上のエネルギーをもつ解の挙動については、振動数が十分大きいときには、Nakanishi-Schlag(2012)と同様に、9 つの異なる大域挙動をする解に分類することが出来た。また、振動数が十分小さいときには、摂動法を用いると、極限方程式はコンパクト性が欠如した方程式になるので、基底状態の一意性を示すことですら自明でない。ここでは、基底状態の満たす性質を詳細に調べることで、ある次元と非線形項の指数においては、基底状態が一意であることを用いた。さらには、L^{2} 臨界とエネルギー臨界の 2 つの臨界指数をもつ 2 重冪について考えた。このときは、基底状態の線形不安定性がこれまでと同様に示すことが出来ない。そこで、振動数が十分大きいときには、基底状態の挙動に関して、2 次近似まで調べることにより、線形不安定性を示すことが出来た。

⑵ 一般化リュウビル方程式に対しては、空間 3 次元以上や 9 次元以下の場合、Miyamoto(2012)の方法を用いて、正則解と特異解の交点の数を調べることにより、分岐が無限個の折れ曲がりを持つことを示した。また、11 次元以上については、分岐のダイアグラムを調べることは出来なかったが、それに関連するモース指数と呼ばれる位相的な量を計算することが出来た。具体的には、11 次元以上のとき、特異解のモース指数は、有限であることが分かった (3 次元以上で 9 次元以下のときには、特異解のモース指数は無限であることが分かっている)。また、2 次元のときには、特異解のモース指数は無限大であることが分かった。これを用いると、もし、特異解が一意であることが示せれば、分岐は無限個の折れ曲がりを持つことが分かる。

5．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）
① Hiroaki Kikuchi and Juncheng Wei, Bifurcation diagram of solutions to elliptic equation with exponential nonlinearity in higher dimensions, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.に出版予定, 査読有り.

https://www.cambridge.org/core/journals/proceedings-of-the-royal-society-of-edinburgh-section-a-mathematics

〔学会発表〕（計　5　件）
① Hiroaki Kikuchi, Global dynamics above the ground state energy for a class of nonlinear Schroedinger equations with critical growth, The Tenth IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations and Wave Phenomena: Computation and Theory, 2017 年 3 月 29 日, Georgia, Athens.
② 菊池弘明, 指数型非線形項をもつ楕円型方程式の正値解の分岐ダイアグラム, 応用数学セミナー, 2016 年 10 月 13 日, 東北大学.
③ 菊池弘明, 指数型非線形項をもつ楕円型方程式の正値解の分岐について, NLPDE セミナー, 2016 年 10 月 7 日, 京都大学
④ Hiroaki Kikuchi, Asymptotic behavior of solutions for a class of nonlinear Schroedinger equations, AIMS Conference 2016, 2016 年 7 月 2 日, Orland.
⑤ 菊池弘明, Global dynamics above the ground state energy for the combined power-type nonlinear Schroedinger equations with energy-critical growth at low frequencies", PDE seminar, 2016 年 5 月 20 日, 北海道大学.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織
(1)研究代表者
菊池弘明（Hiroaki，Kikuchi）
津田塾大学・学芸学部数学科・准教授

研究者番号：00612277

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：

(4)研究協力者
(　　　)