2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８０００７５
研究課題名（和文）離散可積分系の超離散極限および有限体上での数理構造の研究

研究課題名（英文）Mathematical structure of discrete integrable systems for ultra-discrete limit, and that on finite field

研究代表者
間田　潤（MADA, Jun）

日本大学・生産工学部・准教授

研究者番号：８０３９６８５３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：一つには，離散KdV方程式（双線形，非線形），離散戸田方程式（半無限境界条件，分子境界条件，周期境界条件）におけるローラン性（各項がローラン多項式である性質），既約性，co-primeness（一定距離離れた項が互いに素である性質）を示し，これまでの可積分系判定「特異点閉じ込め法」と同様，co-primenessでも可積分判定が出来ることを示した．
もう一つには，離散系および超離散系で培った知識・技術をもとに，実験で観察された内皮細胞の運動データを考察することで，セルオートマトンを利用した血管新生の基礎モデルを構築し，さらに連続化および血管内皮細胞増殖因子の影響を取り入れたモデルの拡張を行った．

研究成果の概要（英文）：I proved that the discrete KdV equation (the bilinear form, the nonlinear form) and the discrete Toda equations (semi-infinite boundary conditions, molecular boundary conditions, periodic boundary conditions) have the Laurent property, the irreducibility and co-primeness.
The other hand, from recent time-lapse imaging experiments on the dynamics of endothelial cells (ECs) in angiogenesis, I proposed a mathematical model of ECs by methods of a discrete system and a ultra-discrete discrete system. Furthermore, I proposed a continuous model and an extended model incorporating the influence of vascular endothelial growth factor (VEGF).

研究分野：数物系科学

キーワード：応用数学　可積分系　離散系　セルオートマトン　数理医学　血管新生

## １．研究開始当初の背景

(1) 周期箱玉系の相関関数の構造

可解格子模型の研究において，相関関数の決定は非常に重要な課題である．したがって，その極限系である周期箱玉系(引用文献 1,2)においても相関関数を求めることが一つの目標となる．研究開始時点では，組み合わせ論的手法を用いて，1 点相関関数と近距離の 2 点相関関数の具体的な表式を，より一般の N 点相関関数に対しては，超離散テータ関数の有限和による表式を得ていた(引用文献 3)．可解格子模型の相関関数は qKZ 方程式やパンルヴェ方程式と深い関係にあることは良く知られているので，さらに研究を進めて「周期箱玉系の相関関数が満たす方程式の導出」を行うことにした．

(2) 離散可積分系の有限体上での考察

前述の箱玉系は，超離散化と呼ばれる極限操作により導出されるセルオートマトンであり，これまで多くの研究者により研究されてきた対象である．しかしながら，極限操作に限らず，従属変数を離散化する手法は考えられるはずであり，その一つとして，離散可積分方程式を有限体上に還元し，従属変数を離散化することを考えた（引用文献 4)．

これまでになされた研究においては，離散可積分方程式を単純に有限体上に還元するため，分母 0 の出現で，時間発展が上手く定義できないことが難点であった．そこで，図１のように還元 $\pi$ と写像 $\phi$ が可換であるという性質 good reduction を拡張し，図２のように有限ステップの合成により，還元と写像が可換になるという性質を「almost good reduction」と呼ぶことにし，これにより有限体上での離散可積分系の時間発展を定義することで研究を行うことにした．

$$\begin{array}{ccc} (x,y) & \xrightarrow{\phi} & \phi(x,y) \\ \downarrow\pi & & \downarrow\pi \\ (\tilde{x},\tilde{y}) & \xrightarrow[\bar{\phi}]{} & \bar{\phi}(\tilde{x},\tilde{y}) = \pi(\phi(x,y)) \end{array}$$

図１．good reduction

$$\begin{array}{ccccc} (x_n,y_n) & \xrightarrow{\phi_n} & (x_{n+1},y_{n+1}) & \xrightarrow{\phi_{n+1}} \cdots \xrightarrow{\phi_{n+m-1}} & (x_{n+m},y_{n+m}) \\ \downarrow\pi & & & & \downarrow\pi \\ (\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) & & \xrightarrow[\bar{\Phi}_n^m]{} & & \bar{\Phi}_n^m(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = (\tilde{x}_{n+m},\tilde{y}_{n+m}) \end{array}$$

ただし，$\bar{\Phi}_n^m = \overline{\phi_{n+m-1} \circ \cdots \circ \phi_{n+1} \circ \phi_n}$

図２．almost good reduction

## ２．研究の目的

(1) N 点相関関数として超離散テータ関数の有限和による表式を得ているが，この表式から相関関数が満たす方程式を探るのは大変である．そこで，より扱いやすく一般的な相関関数の表現を求め，相関関数の満たす方程式（漸化式）を導出し，パンルヴェ方程式や qKZ 方程式の超離散アナログとの関係を求める．さらに，その方程式の解の表現とテータ関数による表現，組み合わせ論的な表現を比較し，テータ関数たちの満たす関係式（おそらくはフェイの関係式の超離散アナログ）および超離散テータ関数と組み合わせ論的な量の関係を明らかにする．

(2) Almost good reduction を導入し，有限体上での時間発展をきちんと定義し，離散 KdV 方程式，離散パンルヴェ方程式などの個々の方程式で考察を進める．そして，超離散系で明らかにされているような初期値問題などを明らかにすること，他の離散可積分方程式についても同様な手法による考察を行い有限体上での構造を明らかにする．

有限体上でも超離散化と同様，元の離散方程式の性質が保てるのではないかと考えている．一方で，「ソリトン解」とは異なる孤立波解が得られていることから，有限体上での構造が明らかになれば，超離散化とは異なるセルオートマトンが構成でき，新たな研究分野の確立につながると考える．

(3) 当初の予定にはなかったが，クラスター代数において，クラスターの変異を時間発展と捉え，超離散化を行うとセルオートマトンを得ることが出来るので，離散可積分系を考察するための視点を増やすために考察を行

う．
(4) 近年，医学系における実験の技術・精度の向上により，血管の成長に血管内皮細胞 1 つ１つの挙動が大きく関わっているという事実が報告された．細胞個々の連続的な動きを考察することは非常に大変であるので，離散系・超離散系の手法，特にセルオートマトンの考え方を用いることにで，血管新生のメカニズムを解明することを考えた．

３．研究の方法

(1)系の周期性に着目したフーリエ級数を用いた母関数の導出を行う．
(2) Almost good reduction の考え方は，有限体上に還元する前の離散方程式において，順番の近い解が互いに素であることに他ならない．さらに，離散方程式の解について「互いに素条件」に着目すると，離散方程式の各項におけるローラン性（各項がローラン多項式である性質），既約性，co-primeness（一定距離離れた項が互いに素である性質）と見直すことができるので，これらの視点から考察を行う．
(3) クラスター代数の超離散化により得られたセルオートマトンで，有限体上で行った考察を行う．
(4) 培養器内で培養している血管で，血管新生に関わる内皮細胞の観察が行われ，各細胞の運動データが蓄積されている．それらのデータを解析することにより，血管新生に関わる細胞運動の主要な効果を抽出し，セルオートマトンモデルを構成する．

４．研究成果

(1) 他の研究が進展を見せたことから，周期箱玉系の相関関数についての研究は進展させることが出来なかったため，今後にはなるがフーリエ級数を用いた母関数の導出を実行したいと考えている．
(2) 離散 KdV 方程式（双線形，非線形），離散戸田方程式（半無限境界条件，分子境界条件，周期境界条件）で考察を行い，すべてにおいてローラン性，既約性，co-primeness を示した．特に，周期境界条件を課した系においても，性質が成り立つことを示した点は，これまでにない結果であると考える．

この他に，これまで可積分系であるかの判定に用いられた「特異点閉じ込め法」と同じように，co-primeness でも可積分判定が出来ることを示した．今後は，特異点閉じ込め法では判定できない可積分方程式の判別に co-primeness が役立つかが鍵になると考える．
(3) 具体的な結果を得るまでには至らなかったが，このような考察を通して，クラスター代数と離散可積分系との関係性を明らかに出来ればと考える．
(4) 主要な運動の効果を抽出し，細胞間の遠距離と近距離の２種類の引力および斥力（排除体積効果）の２体相互作用により離散モデルを構成した．さらに，離散モデルの連続系近似として連続モデルを，さらに内皮細胞活性化因子の効果を導入した拡張モデルを構築した．しかし，実際の細胞の動きと比べると，マクロ的には性質が再現されていても，ミクロ的には個々の細胞の動きが再現されていなかった．

そこで，実験の進展によって，細胞が１つの場合，少数の場合，多数の場合で挙動が異なることが分かってきたことから，それぞれの状況の細胞の運動を包括的に再現するような数理モデルの構成を試みた．現状では，おおよその細胞の運動を再現するようなシミュレーションにはなってきているが，まだ不完全なモデルではあるので，今後の課題として改良が必要であると考えている．

〈引用文献〉

① Jun Mada, Makoto Idzumi, Tetsuji Tokihiro, “The exact correspondence

between conserved quantities of a periodic box-ball system and string solutions of the Bethe ansatz equations”, J. Math. Phys. 47, 053507 (2006)

② Jun Mada, Makoto Idzumi, Tetsuji Tokihiro,“Fundamental cycle of a periodic box-ball system and solvable lattice models”, J. Phys. A: Math. Gen. 39, 4985-4997 (2006)

③ Jun Mada and Tetsuji Tokihiro, “Correlation functions for a periodic box-ball system”, J. Phys. A: Math. Theor. 43, 135205, (2010)

④ Masataka Kanki, Jun Mada, K M Tamizhmani and Tetsuji Tokihiro, “Discrete Painleve II equation over finite fields”, J. Phys. A: Math. Theor. 45, 342001, (2012)

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① K. MATSUYA, F. YURA, J. Mada, H. KURIHARA and T. TOKIHIRO,“A DISCRETE MATHEMATICAL MODEL FOR ANGIOGENESIS”, SIAM J. APPL. MATH 76, 2243-2259 (2016) 査読有り
DOI. 10.1137/15M1038773

② 間田 潤, 松家 敬介, 由良 文孝, 栗原 裕基, 時弘 哲治,“血管新生の数理モデル”, 日本応用数理学会論文誌 26, 105-123 (2016) 査読有り
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsiamt/26/1/26_105/_pdf

③ Masataka Kanki, Jun Mada, Tetsuji Tokihiro,“Integrability criterion in terms of coprime property for the discrete Toda equation”, J. Math. Phys. 56, 022706 (2015) 査読有り
http://dx.doi.org/10.1063/1.4908109

④ Masataka Kanki, Jun Mada, Takafumi Mase, Tetsuji Tokihiro, “Irreducibility and co-primeness as an integrability criterion for discrete equations”, J. Phys. A: Math. Theor. 47, 465204 (2014) 査読有り
doi:10.1088/1751-8113/47/46/465204

〔学会発表〕（計６件）

① 塩田 佳明, 豊谷 純, 間田 潤,“エレベーター内の乗降者配置による稼働効率化−乗降者配置システムによるエレベーター内の制御−”, 情報処理学会 第80回全国大会, 早稲田大学, 2018年3月

② 野邊 厚, 間田 潤,“クラスター代数とセルオートマトン”,日本応用数理学会, 北九州国際会議場, 2016年9月

③ 野邊 厚, 間田 潤,“クラスター代数とQRT系”,日本応用数理学会,神戸学院大学, 2016年3月

④ 間田 潤, 松家 敬介, 由良 文孝, 時弘 哲治, 栗原 裕基,“血管新生の数理モデルについて”,日本応用数理学会, 金沢大学, 2015年9月

⑤ 神吉 雅崇, 時弘 哲治, 間田 潤,“周期離散戸田方程式における互いに素条件”, 日本数学会, 明治大学, 2015年3月

⑥ 神吉 雅崇, 時弘 哲治, 間瀬 崇史, 間田 潤,“互いに素条件による離散方程式の可積分性判定”,日本数学会, 広島大学, 2014年9月

６．研究組織
(1)研究代表者
間田　潤（MADA, Jun）
日本大学・生産工学部・准教授
研究者番号：８０３９６８５３