様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 29 年　 6 月 13 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2016
課題番号：２６８０００８９

研究課題名（和文）ハイブリッド型不連続Galerkin法のスキーム開発と数学解析

研究課題名（英文）Development of the hybridized discontinuous method and its mathematical analysis

研究代表者
及川　一誠（Oikawa, Issei）

早稲田大学・理工学術院・次席研究員（研究院助教）

研究者番号：１０６３７４６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,800,000円

研究成果の概要（和文）：Poisson方程式及びStokes方程式に対して，ハイブリッド型不連続ガレルキン(HDG)法の次数低減手法（安定化項において数値トレースの近似空間にL2直交射影を施す手法）の研究を行った．次数低減手法の近似解の収束次数が最善であることは，多角形あるいは多面体分割がchunkiness conditionをみたすという条件下で，数学的に証明することができた．混合型HDG法についても，離散化方程式においてL2直交射影を導入することで，新たに次数低減手法を導出した．数値実験では最善次数を達成できることは確認しているが，誤差解析は今後の課題として残った．

研究成果の概要（英文）：We developed and analyzed reduced-order hybridized discontinuous Galerkin (HDG) methods for Poisson's equation and the Stokes equations. The proposed method is obtained by introducing the L2-orthogonal projection onto the finite element space of a numerical trace in the stabilization term of the standard HDG method. We mathematically proved that the order of convergence of the proposed method is optimal if we use a polygonal or polyhedral mesh satisfying the so-called chunkiness condition. For the mixed-type HDG method, we devised a new reduced-order scheme by introducing the L2-orthogonal projection in all the discretized equations. It was verified by numerical experiments that the new scheme achieves the optimal-order convergence, however, its error analysis is not provided.

研究分野：数値解析

キーワード：有限要素法　不連続ガレルキン法　HDG法

１．研究開始当初の背景

「ハイブリッド型不連続ガレルキン(Hybridized Discontinuous Galerkin)法」とは，近年盛んに研究の行われている「不連続ガレルキン法（引用文献②）」に，要素間境界上の未知関数を新たに導入した新しい手法のことである．「ハイブリッド」という単語は，有限要素法では要素間境界上に未知量を導入するという特別な意味で用いられる．以下，ハイブリッド型不連続ガレルキン法を省略して HDG 法と呼ぶことにする．

HDG 法における定式化では，要素内部と，要素間境界上に未知関数を導入する．要素間境界上のものを，数値トレースと呼ぶ．定式化の上ではこれらの２種類が未知量として導入されるが，要素内部の未知関数は，要素ごとに数値トレースから完全に決定されるため，最終的な未知量は，数値トレースのみとなる．これにより，不連続ガレルキン法の最大の欠点であった，未知数の個数が従来の有限要素法に比べて多くなってしまうという欠点を解消することができる．

本研究開始当初は，HDG 法の導出自体は，最も簡単なモデル問題として，Poisson 方程式から出発し，移流拡散方程式や Navier-Stokes 方程式に至るまで，一通り終わっていた状況である．誤差解析等の数学的基礎部分についても，研究はかなり進められた．HDG 法の基礎的次項については引用文献⑥⑦を，研究結果の概要については雑誌論文②等を参照されたい．しかし，後処理(postprocessing)による超収束現象など，理論的に完全に解明されてはいない問題が依然として残っていた．

本研究代表者も，Poisson 方程式に対して，要素内部の近似関数に区分１次多項式を，数値トレースの近似に区分定数関数（以下，P1-P0 要素などと呼ぶ）を用いた HDG 法を考案し，数値実験により最善次数の収束を達成できることを独自に見出していた．従来の HDG 法では，要素内部と数値トレースの近似多項式次数を同じにそろえるのが自然であったため，P_1-P_0要素のように，次数をずらして収束が最善次数になることは不思議な事であった（本研究を遂行していく内に，このようなことは，C. Lehrenfeld が 2010 年に，Master’s thesis（引用文献⑤）で言及していたのが初出であることがわかった）．

このように，HDG 法にはまだ本質的に未解明な部分があり，特に数学的考察による内部構造の理解が必要となっていた．

２．研究の目的

上で述べたP_1-P_0要素の研究結果を発展させ，P_{k+1}-P_k要素を用いた HDG 法を開発し，数学解析を行うことが本研究の目的である．その過程で，上述した HDG 法の未解明部分を数学的に理解することも目指す．

３．研究の方法

初めに，Poisson 方程式をモデル問題とし，数値実験と数学解析を同時並行させながら，P_{k+1}-P_k要素を用いた HDG 法の導出を行う．新手法の導出を行った後，数学的に厳密な誤差解析を行う．その結果に基づき，対象の方程式を移流拡散方程式から Stokes 方程式へと進み，最終的に Navier-Stokes 方程式に発展させる．

４．研究成果

(i) Poisson 方程式に対する次数低減 HDG 法の導出と数学解析．

研究当初に得られていたP_1-P_0要素に関する結果に基づき，P_{k+1}-P_k要素の HDG 法の導出を行った．P_1-P_0要素を実現するにあたってのキーポイントは，各辺あるいは各面の重心における値にのみ安定化を施すということであった．これを一般化し，安定化項において数値トレースの近似空間にL^2直交射影を施すことで，P_{k+1}-P_k要素の HDG 法の開発に成功した．この安定化項において直交射影を施す新しい HDG 法のことを，本研究代表者は，数値トレースの近似多項式次数が要素内部のものより１つ低いという意味で，次数低減(reduced-order) HDG 法と名付けて呼んでいる．

さらに，２次元の場合に限り，L^2直交射影は，安定化項の積分計算に用いる Gauss 型数値積分公式の次数を本来必要な次数より１つだけ低くすることにより，簡単に実装できることも分かった．収束次数が最善であることは，数値実験で直ぐに確認された．数学的な証明は，多角形あるいは多面体分割が，chunkiness condition というそれほど強くない条件下で，示すことができた．加えて，三角形あるいは四面体分割と最低次数の多項式を用いた次数低減 HDG 法は，数値トレース部分は，よく知られた Crouzeix-Raviart 非適合有限要素法の解と重心部分でのみ一致するということも証明した．論文には記さなかったが，数値実験でも一致性を確認した．以上の結果は，雑誌論文⑦として出版された．

(ii) Stokes 方程式に対する次数低減 HDG 法の研究．

Poisson 方程式の結果を発展させ，Stokes 方程式に対する次数低減手法を開発した．Stokes 方程式の場合，流速部分は Poisson 方程式の結果を自然に拡張すればよいが，圧力項の扱いについては非自明であった．数値実験等の結果より，流速とその数値トレースの近似多項式次数はそれぞれ k，k+1 とし，圧力の次数は k とすれば良いことが

わかった．理論的には，inf-sup 条件と呼ばれる不等式を証明しなければならなかったが，Egger-Waluga(引用文献④)による従来の HDG 法の inf-sup 条件の証明法が，次数低減手法でも，ほぼそのままの形で使えることが判明した．これにより，誤差解析はストレートに証明することができた．
Poisson 方程式の場合と同様に，三角形および四面体分割と最低次数の近似多項式を組み合わせた場合，次数低減 HDG 法と Crouzeix-Raviart 非適合有限要素法の解との一致も理論的に証明した．高次多項式の場合は，このような一致性は成り立たないが，安定化パラメータτを限り無く大きくしたとき，Gauss-Legendre 非適合有限要素法（Crouzeix-Raviart 非適合有限要素法の高次多項式への一般化）の解に，1/τのオーダーの速度で収束することを証明した．数値実験でも実際に 1/τのオーダーで収束することが確認されている．
Gauss-Legendre 非適合有限要素解に単に収束することは，既存結果の組み合わせで示すことができるが，速度が 1/τのオーダーであることを示すには，逆不当式に相当する不等式を用いる必要があるため，数学的には非自明な結果である．Stokes 方程式に対する次数低減 HDG 法の研究結果は，雑誌論文⑥として出版された．Qiu-Shi らによって次数低減手法は，移流拡散方程式（引用文献⑧），Navier-Stokes 方程式（引用文献⑨），線形弾性体問題（引用文献⑩）に適用され，数学的な誤差解析も示された．

(iii)混合型 HDG 法における次数低減 HDG 法の研究．

(i)及び(ii)で提案・研究した HDG 法はいわゆる interior penalty(IP)法(引用文献①)に基づいた手法である．これらの手法は，現在は local discontinuous Galerkin (LDG) 法に基づいた混合型 HDG 法の一般的枠組みに含まれる（引用文献③）．定式化の際に，要素内部における未知関数とその数値トレースに加え，勾配に対する未知関数も導入するのが特徴である．最終的な未知量は数値トレースのみになるという点はもちろん同じである．本研究では，全ての離散化方程式において，L^2直交射影を施す手法を新たに提案した（学会発表①）．数値実験では，最善次数を達成できることは確認しているが，数学解析は今後の課題として残った．

＜引用文献＞

① D.N. Arnold, An interior penalty finite element method with discontinuous elements, SIAM J. Numer. Anal., 19 (1982) 742-760.
② D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn and L.D. Marini, Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. SIAM J. Numer. Anal., 39 (2002) 1749-1779.
③ B. Cockburn, J. Gopalakrishnan and R. Lazarov, Raytcho, Unified hybridization of discontinuous Galerkin, mixed, and continuous Galerkin methods for second order elliptic problems, SIAM J. Numer. Anal., 47 (2009) 1319-1365.
④ H. Egger and C. Waluga, hp analysis of a hybrid DG method for Stokes flow, IMA J. Numer. Anal., 33(2013) 687-721.
⑤ C. Lehrenfeld, Hybrid Discontinuous Galerkin Methods for Solving Incompressible Flow Problems, Master’s Thesis, RWTH Aachen University (2010).
⑥ I. Oikawa and F. Kikuchi, Discontinuous Galerkin FEM of hybrid type, JSIAM Lett., 2 (2010) 49-52.
⑦ I. Oikawa, Hybridized discontinuous Galerkin method with lifting operator, JSIAM Lett., 2 (2010) 99-102.
⑧ W. Qiu and K. Shi, An HDG method for convection diffusion equation, J. Sci. Comput., 66 (2016) 346-357.
⑨ W. Qiu and K. Shi, A superconvergent HDG method for the incompressible Navier-Stokes equations on general polyhedral meshes, IMA J. Numer. Anal., 36 (2016) 1943-1967.
⑩ W. Qiu, J. Shen and K. Shi, An HDG method for linear elasticity with strong symmetric stresses, to appear in Math. Comp.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）
① G. Zhou, T. Kashiwabara and I. Oikawa, A penalty method for the time-dependent Stokes problem with the slip boundary condition and its finite element application, RIMS Kokyuroku, to appear.（査読なし）
② I. Oikawa, HDG methods for second-order elliptic problems, RIMS Kokyuroku, to appear.（査読なし）
③ 及川一誠, HDG methods with reduced stabilization (in

Japanese), RIMS Kokyuroku 1995 (2016) 66--74 （査読なし）

④ T. Kashiwabara, I. Oikawa and G. Zhou, Penalty method with P1/P1 finite element approximation for the Stokes equations under the slip boundary condition, Numer. Math., 134 (2016) 705-740.（査読有り）

⑤ G. Zhou, T.Kashiwabara and I. Oikawa, Penalty method for the stationary Navier-Stokes equations under the slip boundary condition, J. Sci. Comput., 68 (2016) 339-374.（査読有り）

⑥ I. Oikawa, Analysis of a reduced-order HDG method for the Stokes equations, J. Sci. Comput., 67 (2016) 475-492. （査読有り）

⑦ I. Oikawa, A hybridized discontinuous Galerkin method with reduced stabilization,J. Sci. Comput., 65 (2015) 327-340. （査読有り）

〔学会発表〕（計１２件）

① I. Oikawa, Reduced stabilization for the HDG method, Workshop on Recent Advances in Finite Element Methods, City University of Hong Kong(China), March 13--15, 2017.

② 及川一誠, 実行列に対する実および複素作用素ノルムの違いについて, 研究集会「非線形現象と高精度高品質数値解析」, 富山大学人間発達科学部(富山県), 2017 年 2 月 14-15 日.

③ I. Oikawa, A finite element method for the Stokes equations with a penalized slip boundary condition, International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling and Numerics, Waseda University (Tokyo), November 10--13, 2016.

④ I. Oikawa, HDG methods for second-order elliptic problems, RIMS 研究集会「現象解明に向けた数解析学の新展開 II」, 京都大学数理解析研究所（京都府）, 2016 年 10 月 19--21 日.

⑤ 及川一誠, 次数低減 HDG 法について, 数値解析ワークショップ, 新潟大学理学部（新潟県）, 2016 年 6 月 1 日.

⑥ 及川一誠, HDG methods with reduced stabilization, RIMS 研究集会「現象解析に向けた数値解析学の新展開」, 京都大学数理解析研究所（京都府）, 2015 年 11 月 20 日.

⑦ I. Oikawa, HDG methods with reduced stabilization, International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling and Numerics, Waseda University (Tokyo), November 7--11, 2015.

⑧ I. Oikawa, HDG methods with reduced stabilization, Workshop on optimization and numerical analysis, Niigata University (Niigata), February 15--16, 2015.

⑨ 及川一誠, Stokes 方程式に対する弱安定化 HDG 法について, 日本応用数理学会年度年会, 金沢大学（石川県）, 2015 年 9 月 9-11 日.

⑩ 及川一誠, A hybridized discontinuous Galerkin method with reduced stabilization, 日本数学会秋季総合分科会, 広島大学（広島県）, 2014 年 9 月 25--29 日.

⑪ 及川一誠, ハイブリッド型不連続 Galerkin 法の弱安定化スキームについて, 日本応用数理学会年度年会, 政策研究大学院大学（東京都）, 2014 年 9 月 3--5 日.

⑫ 及川一誠, 弱安定化ハイブリッド型不連続 Galerkin 法について,東京大学数値解析セミナー, 東京大学数理科学研究科（東京都）, 2014 年 6 月 9 日.

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）
○取得状況（計０件）

〔その他〕
ホームページ等
https://www.researchgate.net/profile/Issei_Oikawa

６．研究組織
(1)研究代表者
及川 一誠（OIKAWA, Issei）
早稲田大学・理工学術院基幹理工学研究科・次席研究員
研究者番号：10637466

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者
なし