様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　　元 年　　６ 月 ２６ 日現在

機関番号：１３１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2018
課題番号：２６８００９０

研究課題名（和文）重調和微分作用素の高精度な固有値評価に関する研究

研究課題名（英文）High-precision eigenvalue estimation for the Biharmonic differential operator

研究代表者
劉　雪峰（LIU, Xuefeng）

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：５０５７１２２０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：微分作用素の固有値問題は数学の研究において最も基礎的な研究課題の一つであり、古くから多くの研究がなされてきました。固有値の上界評価は容易に得られますが、固有値の厳密な下界を求めるのは非常に困難な問題として残されてきました。本研究では、一般的な自己共役コンパクト微分作用素の固有値問題に対して汎用的な固有値評価方法を提案した。当該方法の特徴として、適合有限要素に限らず、非適合有限要素法で得た近似固有値の誤差にも厳密に評価することができます。提案方法の応用例として、重調和微分作用素、Stokes微分作用素、Steklov微分作用素の固有値の厳密な評価が得られました。

研究成果の学術的意義や社会的意義
微分作用素の厳密な固有値評価は非線形方程式の解の計算機援用存在証明などの研究に重要な役割を果たしています。本研究で提案した固有値の評価方法によって多くの微分作用素の厳密な固有値評価が可能となり、当該方法が数値計算の品質保証や計算機援用証明の難題解決に貢献できると思われます。

研究成果の概要（英文）：To give lower and upper bounds for the eigenvalues of differential operators is one of the fundamental problems in the history of mathematics. On the opposite side of easy-to-obtain upper eigenvalue bounds, it is difficult to provide lower eigenvalue bounds for the operators. In this research, the researcher proposed a general framework to bound eigenvalues of differential operators, which can be performed along with the conforming finite element method (FEM) or the non-conforming one. Such a framework has been successfully applied to provide explicit bounds for the eigenvalues of the Biharmonic operator, the Stokes operator and the Steklov operator. One feature of proposed eigenvalue estimation is that, it takes the advantages of the nice property of special non-conforming finite element methods, such as the Crouzeix-Raviart FEM, the Fujino-Morley FEM, to give concise and efficient lower eigenvalue bounds evaluation.

研究分野：数学基礎・応用数学

キーワード：微分作用素の固有値問題　有限要素法　誤差評価理論　精度保証付き数値計算　重調和微分作用素　Stokes微分作用素　Steklov微分作用素

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

（１）研究開始の当初では、板の振動などの数理モデルと数値解析に現れる重調和微分作用素について、微分作用素の固有値の厳密な下界評価方法はまた開発されていないという状況でした。

（２）研究代表者の劉の先行研究（引用文献①）では、有限要素法によるラプラス作用素の厳密な固有値評価方法が世界初提案されて、当該方法の他の固有値問題への拡張及び高精度な固有値評価が望まれていました。

２．研究の目的

重調和微分作用素の固有値に対して、最小の固有値から順番に固有値の厳密な上界と下界評価を提供することが研究の目的です。特に、固有値の上界が適合有限要素などの方法によって効率的に評価できる反対側に、固有値の下界評価は難しい課題として、本研究で解決したい問題です。

３．研究の方法

（１）本研究では、ラプラス作用素の固有値評価の先行研究で開発した方法を拡張して、一般的な自己共役微分作用素の固有値問題を考えます。固有値問題に関わる関数空間に対して、有限要素法で構成した有限次元の空間で近似して、元々の関数空間から有限要素空間までの射影作用素の事前誤差評価を利用して、固有値の厳密な下界誤差評価理論を構築します。

（２）重調和微分作用素の固有値問題に対して、Fujino-Morley 有限要素法という非適合有限要素法を用い、Fujino-Morley 射影作用素の誤差評価を求めます。さらに、固有値の厳密な下界誤差評価理論を応用して、重調和微分作用素の固有値の厳密な評価を提供します。

４．研究成果

（１）本研究では、研究代表者の劉の先行研究で開発したラプラス微分作用素の固有値問題の固有値評価方法（引用文献①）を拡張して、一般的な自己共役コンパクト作用素の固有値問題に対応する固有値の厳密な評価方法を提案した。この方法は引用文献①で使用された適合有限要素法に限らず、連続性のない非適合有限要素法にも対応できます。さらに、Raviart-Thomas 要素や、Fujino-Morley 要素など特殊な非適合有限要素を利用することで、適合有限要素より軽い計算で固有値の厳密な下界評価が得られます。この結果は２０１５年論文⑦で発表され、これまでに（２０１９年６月現在）６０回以上の引用があり、多くの研究者に影響を及ぼしています。

（２）論文⑦で提案した方法を重調和微分作用素の固有値評価を評価するとき、Fujino-Morley 有限要素法で現れる補間作用素の２つの誤差評価定数の具体的な値が要求されています。研究代表者は当該定数の最適な値を評価して、重調和作用素の効率かつ厳密な固有値評価をえました（論文②）。特に、誤差定数の最適な評価結果によって、三角要素が崩れる場合（最大内角が 180 度に近い）でも補間関数の誤差が抑えられることが分かりました。

（３）Lagrange 補間方法と Fujino-Morley 補間方法の誤差評価に現れる重調和微分作用素の固有値を評価して、補間関数の誤差定数の算出方法を提案した。論文②では、任意形状を持っている三角要素における２次 Lagrange 補間関数の誤差評価の定数について、Fujino-Morley 要素の計算方法と論文⑦で提案した固有値評価理論によって、定数の高精度な評価方法を開発して、いつくかの具体的三角形に対して定数の厳密な値の評価を得ました。論文⑤では、１次補間関数と Fujino-Morley 補間関数の誤差定数を検討した。

（４）研究成果（１）の応用として、論文⑦で提案した固有値評価理論と Enriched Raviart-Thomas 有限要素法を利用して、Stokes 微分作用素の固有値評価方法を提案した。Stokes 微分作用素の固有値問題は非線形方程式 Navier-Stokes 方程式の解の検証に重要な役割を果たしています。研究代表者は Enriched Raviart-Thomas 有限要素法の事前誤差評価の定数の最適な評価を求めて、Stokes 作用素の厳密な固有値評価を得ました（論文⑥）。

（５）研究成果（１）の応用として、Steklov 微分作用素の固有値評価方法を検討した。Steklov 微分作用素の固有値問題の例として、Sobolev 関数空間のトレース定理に現れる定数の評価が Steklov 微分作用素の最小固有値の評価に帰着することが挙げられます。研究代表者は論文⑦で提案した固有値評価理論と Raviart-Thomas 有限要素法を利用することで、Steklov 微分作用素の固有値を評価して、トレース定理に現れる定数の厳密な評価を得ました（論文①）。

（６）Raviart-Thomas 有限要素法の事後誤差評価を検討して、Hypercircle 方法によって解の特異性にも自然に対応できる事後誤差評価を提案した（論文④）。さらに、Hypercircle 方法を利用することで、Neumann 境界条件に現れる近似誤差を対応できる適合有限要素法の事前誤差

評価を検討した。この事前誤差評価はSteklov固有値の厳密評価にも使用されます。

（7）重調和微分作用素の高精度な固有値評価について、Kato-Lehmann-Goerisch の定理と高次有限要素法を利用することで、高精度な固有値評価を数値実験で確認した。ただし、論文の作成は遅れましたので、当該研究成果を 2019 年度にまとめて投稿する予定です。

＜引用文献＞

① Xuefeng Liu and Shin'ichi Oishi, Verified eigenvalue evaluation for Laplacian over polygonal domain of arbitrary shape, SIAM J. Numer. Anal., 51(3), 1634-1654, 2013

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　７　件）(すべては査読有)

① Chun'guang YOU, Hehu XIE and Xuefeng LIU, Guaranteed eigenvalue bounds for the Steklov eigenvalue problem, SIAM J. Numer. Anal., 57(3), pp.1395-1410, 2019.
DOI:10.1137/18M1189592

② Shih-kang LIAO, Xuefeng LIU, Optimal estimation for the Fujino-Morley interpolation error constants, to appear in Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2019
DOI: 10.1007/s13160-019-00351-9.

③ Qin LI, Xuefeng LIU, Explicit Finite Element Error Estimates for Nonhomogeneous Neumann problems, Applications of Mathematics, Vol. 63, Issue 3, pp. 367-379, 2018.
DOI:10.21136/AM.2018.0095-18

④ Xuefeng LIU, Fumio KIKUCHI, Explicit Estimation of Error Constants Appearing in Non-conforming Linear Triangular Finite Element, Applications of Mathematics, Vol. 63, Issue 4, pp. 381-39, 2018.
DOI:10.21136/AM.2018.0097-18

⑤ Xuefeng LIU and Chun'guang YOU, Explicit Bound for Quadratic Lagrange Interpolation Constant on Triangular Finite Elements, Applied Mathematics and Computation, vol.319, pp. 693-701, 2018,
DOI:10.1016/j.amc.2017.08.020

⑥ Manting XIE, Hehu XIE and Xuefeng LIU, Explicit lower bounds for Stokes eigenvalue problems by using nonconforming finite elements, vol. 35, Issue 1, pp. 335-354, 2018,
DOI:10.1007/s13160-017-0291-7

⑦ Xuefeng LIU, A framework of verified eigenvalue bounds for self-adjoint differential operators, Applied Mathematics and Computation, 267, pp.341-355, 2015
DOI: 10.1016/j.amc.2015.03.048

〔学会発表〕（計　１１　件）

① 劉雪峰,偏微分方程式の精度保証付き数値計算法(I) : 境界値問題と固有値問題, 日本応用数理学会・三部会連携「応用数理セミナー」, 東京大学数理科学研究科, 2018 年 12 月

② 劉雪峰,微分作用素の固有値の厳密評価と計算機援用証明への応用, RIMS 研究集会「次世代の科学技術を支える数値解析学の基盤整備と応用展開」, 京都大学・RIMS, 2018 年 11 月

③ Xuefeng LIU, Guaranteed eigenvalue estimation for differential operators and its application in mathematical proof, Spectral Geometry: Theory, Numerical Analysis and Applications (18w5090), Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery, Canada, July, 2018

④ 劉 雪峰, ３次元領域におけるStokes方程式の有限要素法解の事前誤差評価, 日本数学会 2018年年会, 東京大学駒場キャンパス, 2018年3月

⑤ 劉 雪峰, ３次元領域における Stokes 微分作用素の固有値評価, 日本応用数理学会年会 2017年年会, 武蔵野大学有明キャンパス, 2017年9月6日

⑥ Xuefeng LIU, Explicit eigenvalue bounds for self-adjoint partial differential operators, Rigorous Numerics for Infinite Dimensional Nonlinear Dynamics, Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery, May, 2017

⑦ Xuefeng LIU, A framework for high-precision verified eigenvalue bounds by using finite element methods, SCAN, 2016

⑧ 劉 雪峰, Steklov固有値問題とTrace定理の定数の精度保証付き評価, 日本応用数理学会, 2016年研究部会連合発表会, 神戸学院大学, 2016年3月

⑨ Xuefeng LIU, Framework for verified lower eigenvalue bound for self-adjoint differential operators, The 34th JSST Annual Conference International Conference on Simulation Technology, Kanazawa, Oct, 2015

⑩ Xuefeng LIU, High-precision verified eigenvalue bounds for self-adjoint differential operators, Third Workshop on Hybrid Methodologies for Symbolic-Numeric Computation, Beijing, China, August 11, 2015

⑪ 劉 雪峰，自己共役微分作用素の固有値評価のフレームワークの提案，日本応用数理学会2015 年度年会，石川県金沢市金沢大学，2015 年 8 月

〔図書〕（計　1　件）
① 劉　雪峰,「精度保証付き数値計算の基礎」（大石進一編著）、コロナ社、2018 年.（序論の一部と第 8 章「偏微分方程式の精度保証付き数値計算法」（pp.197～243）を執筆した.）

〔その他〕
① 補間関数の誤差定数のオンライ計算サービスと計算コードの配布。
URL：http://www.xfliu.org/onlinelab/