

平成 30 年 6 月 2 日現在

機関番号：13301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800091

研究課題名(和文)非ニュートン流体のための特性曲線有限要素法の開発

研究課題名(英文)Development of Lagrange-Galerkin methods for non-Newtonian fluid flows

研究代表者

野津 裕史(Notsu, Hirofumi)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：00588783

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、粘性と弾性の両方の性質をあわせもつ流体である非ニュートン流体に対して、特性曲線に基づく有限要素スキームの開発・解析・シミュレーションを行うことです。そのために、Navier-Stokes方程式のための圧力安定化特性曲線有限要素スキームの最良誤差評価を得た上で、同スキームを非ニュートン流体のひとつである Peterlin モデルに応用し、非線形スキームと線形スキームを提案しました。ある単純化したPeterlinモデルについて、両スキームの最良誤差評価を得ました。それらを数値計算結果と併せてまとめた論文は、雑誌 ESAIM: M2ANに掲載されました。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is development, analysis and computation of Lagrange-Galerkin schemes for non-Newtonian fluid flow models, where the meaning of Lagrange-Galerkin scheme is a finite element scheme based on the method of characteristics. For that purpose, we proposed nonlinear and linear Lagrange-Galerkin schemes for a non-Newtonian fluid flow model called the Peterlin viscoelastic model after the establishment of the optimal error estimates of the stabilized Lagrange-Galerkin scheme for the Navier-Stokes equations. We finally obtained the optimal error estimates of the two Lagrange-Galerkin schemes for a simplified (Oseen-type) Peterlin viscoelastic model. The theoretical results as well as numerical results were summarized in the two papers published in the journal ESAIM: M2AN.

研究分野：数値解析

キーワード：粘弾性流体 有限要素法 特性曲線 誤差評価

## 1. 研究開始当初の背景

特性曲線法は、流体粒子の軌跡を考えてその軌跡に沿って物質微分項を離散化する手法で物理的視点から自然な数値解法です。その自然な離散化に起因して、高 Reynolds 数問題に適用可能で比較的精度も良く、また、得られる連立一次方程式の係数行列が対称なため、その求解に要する時間とメモリを半減できるという長所もっています。特性曲線有限要素法は特性曲線法と有限要素法を組み合わせた数値解法です。有限要素法がもつ領域形状への柔軟性を併せ持つため、ニュートン流体で支配される流れ問題の強力な数値解法のひとつであるといえます。その有用性から、特性曲線有限要素法の非ニュートン流体へ応用・拡張が期待されていました。

## 2. 研究の目的

ニュートン流体の代表的なモデルである Navier-Stokes 方程式は多くの流れ現象の理解に利用されており、流体分野における最も基本的なモデルであると認知されています。それゆえに多くの数値計算法が提案されており、安定性や収束性といった数学的正当性についての理論整備も進んでいます。当然、非ニュートン流体に対しても研究は進んでおり、いくつかの非ニュートン流体モデルに対して、数値解法が提案され、シミュレーションもなされています。しかしながら、方程式の複雑さや、より強い非線形性から、数学的正当性についての理論整備は十分ではありませんでした。本研究の目的は、非ニュートン流体のための特性曲線有限要素スキームの開発と解析と数値計算を行うことです。

## 3. 研究の方法

具体的な非ニュートン流体として、例えば、ポリマーや関節の滑液などに対して用いられる粘弾性モデルとして知られた FENE-P、Oldroyd-B、Giesekus、Peterlin モデルなどを考えます。これらの粘弾性モデルでは、Navier-Stokes 方程式に、弾性効果を表すコンフォメーション（配向）テンソルについての非線形方程式が加わります。コンフォメーションテンソルの効果によりニュートン流体にはない弾性的な性質を示します。コンフォメーションについての非線形方程式を考慮しながら、流速の最大値および一階導関数の最大値を帰納的に評価できるようにスキームを構築します。

## 4. 研究成果

我々はすでに開発・解析したニュートン流体のための圧力安定化特性曲線有限要素スキームを非ニュートン流体のひとつである Peterlin モデルに応用してスキームを提案しました。すでに述べたように同モデルでも、

Navier-Stokes 方程式に、弾性効果をあらわすコンフォメーションテンソルについての非線形方程式が加わります。提案したスキームは2つあり、ともに、流速・圧力・コンフォメーションテンソルの全てを区分的に線形な要素で近似しており、自由度が少ないという長所を持っています。一方はモデルがもつエネルギー評価をスキームにおいても離散的に実現する非線形スキーム、他方はより容易に数値計算ができる線形スキームです。Peterlin モデルの Oseen 型モデルにおいて、両スキームの誤差評価を与えることに成功しました。それらを数値計算結果と併せてまとめた論文は、雑誌 ESAIM: M2AN に掲載されました（[雑誌論文] (1)、(2)）。ここに、Oseen 型とは、非線形移流項を線形化したという意味ですが、依然として移流項は存在しており、また、複数の非線形項は残ったままです。特に、時間発展する粘弾性流体モデルについて、圧力の誤差評価を与えたのは世界初であり、本研究における特記すべき成果であると考えています。

なお、特性曲線有限要素法は国際的には、Lagrange-Galerkin 法と呼ばれることが多く、研究代表者も研究期間の途中から同名称を採用することにしたため、以下の「5. 主な発表論文等」において特性曲線有限要素法ではなく Lagrange-Galerkin 法が使われています。

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計12件）

- (1) M. Lukáčová, H. Mízerová, H. Notsu and M. Tabata. Numerical analysis of the Oseen-type Peterlin viscoelastic model by the stabilized Lagrange-Galerkin method, Part II: A linear scheme. ESAIM: M2AN, Vol.51 (2017), pp.1663-1689. 査読有. doi:10.1051/m2an/2017032
- (2) M. Lukáčová, H. Mízerová, H. Notsu and M. Tabata. Numerical analysis of the Oseen-type Peterlin viscoelastic model by the stabilized Lagrange-Galerkin method, Part I: A nonlinear scheme. ESAIM: M2AN, Vol.51 (2017), pp.1637-1661. 査読有. doi:10.1051/m2an/2016078
- (3) M. Lukáčová, H. Notsu and B. She. Energy dissipative characteristic schemes for the diffusive Oldroyd-B viscoelastic fluid. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.81 (2016), pp.523-557. 査読有. doi: 10.1002/flid.4195
- (4) H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a stabilized Lagrange-Galerkin scheme of second-order in time for the Navier-Stokes equations. In Y. Shibata and Y. Suzuki

- (eds.), *Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future*, pp.497–530, Springer, 2016. 査読有. doi: 10.1007/978-4-431-56457-7\_18
- (5) H. Notsu and M. Tabata. Stabilized Lagrange–Galerkin schemes of first- and second-order in time for the Navier–Stokes equations. In Y. Bazilevs and K. Takizawa (eds.), *Advances in Computational Fluid–Structure Interaction and Flow Simulation: New Methods and Challenging Computations*, pp.331–343, Springer, 2016. 査読有. doi: 10.1007/978-3-319-40827-9\_26
- (6) P.-Y. Hsu, H. Notsu and T. Yoneda. A local analysis of the axisymmetric Navier–Stokes flow near a saddle point and no-slip flat boundary. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.794 (2016), pp.444–459. 査読有. doi:10.1017/jfm.2016.174
- (7) 野津裕史. Lagrange–Galerkin 法の理論と実践. 学会誌「計算工学」, Vol.20, No.3 (2015), pp.21–24. 査読無.
- (8) H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a stabilized Lagrange–Galerkin scheme for the Navier–Stokes equations. *ESAIM: M2AN*, Vol.50 (2016), pp.361–380. 査読有. doi:10.1051/m2an/2015047
- (9) H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Oseen equations. *Journal of Scientific Computing*, Vol.65 (2015), pp.940–955. 査読有. doi: 10.1007/s10915-015-9992-8
- (10) M. Ogino, A. Takei, H. Notsu, S. Sugimoto, S. Yoshimura. Performance evaluation of iterative methods for complex symmetric systems from high frequency electromagnetic field simulation. 査読有. *Transaction of JSCES*, Vol.2014 (2014), p.20140017. doi: 10.11421/jsces.2014.20140017
- (11) H. Notsu and M. Kimura. Symmetry and positive definiteness of the tensor-valued spring constant derived from P1–FEM for the equations of linear elasticity. *Networks and Heterogeneous Media*, American Institute of Mathematical Sciences, Vol.9, No.4 (2014), pp.617–634. 査読有. doi: 10.3934/nhm.2014.9.617
- (12) H. Notsu and M. Tabata. Stabilized Galerkin–characteristics finite element schemes for flow problems. In P. Iványi and B.H.V. Topping (Eds), *Proceedings of the Ninth International Conference on Engineering Computational Technology*, Civil–Comp Press, Stirlingshire, UK, Paper 71 (13 pages), 2014. 査読有. doi:10.4203/ccp.105.71
- [学会発表] (計 4 3 件)  
 ・国際学会等:
- (1) H. Notsu. Numerical analysis of the Oseen-type Peterlin viscoelastic model. 2018 A3 Fluid Mechanics Workshop, March 10, 2018, Zhejiang University, Hangzhou, China.
- (2) H. Notsu. Numerical analysis and computation of viscoelastic models. *Numerical Analysis: Applications to Biomedical Problems and Foundations*, February 21, 2018, The University of Tokyo, Tokyo.
- (3) H. Notsu. Numerical analysis of viscoelastic models. Mini-symposium on Complex Flows: Dynamics of Viscoelastic and Inertioelastic flows, January 20, 2018, OIST, Okinawa.
- (4) H. Notsu. A structure-preserving finite element scheme for the Maxwell model. A3 Soft Matter Workshop, December 21, 2017, Daejeon, Korea.
- (5) H. Notsu. Numerical analysis of the Oseen-type Peterlin viscoelastic model. The 42nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, August 9, 2017, Hokkaido University, Sapporo.
- (6) H. Notsu. A Lagrange–Galerkin scheme for a diffusive Oldroyd–B viscoelastic fluid. Second Joint Workshop of China–Japan–Korea A3 Foresight Program, November 27, 2015, Xiamen University, China.
- (7) H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a stabilized Lagrange–Galerkin scheme for an Oseen-type diffusive Peterlin model. *International Conference CoMFoS15: Mathematical Analysis of Continuum Mechanics and Industrial Applications*, November 18, 2015, Kyushu University, Fukuoka.
- (8) H. Notsu. Error estimates of Lagrange–Galerkin schemes for flow problems. *International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modeling and Numerics*, November 11, 2015, Waseda University, Tokyo.
- (9) H. Notsu and M. Tabata. Convergence analysis of stable and stabilized Lagrange–Galerkin schemes for natural convection problems. *Joint International Conference and Autumn School 2015*, October 7, 2015, Darmstadt, Germany.
- (10) H. Notsu. A stabilized Lagrange–Galerkin scheme for the Navier–Stokes equations and its computation. *The 12th Hirschegg Workshop on Conservation Laws*, September 17, 2015, Hirschegg, Austria.
- (11) H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of stabilized Galerkin–characteristics finite

- element schemes for incompressible flow problems. The 18th International Conference on Finite Elements in Flow Problems (FEF2015), March 17, 2015, Taipei, Taiwan.
- (12) H. Notsu. Error estimates of Lagrange-Galerkin finite element schemes for natural convection problems. The 11th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, March 12, 2015, Waseda University, Tokyo, Japan.
- (13) H. Notsu. Error estimates of stabilized Lagrange-Galerkin finite element schemes for flow problems. 2015 A3 joint Workshop on Fluid Dynamics and Material Science, February 13, 2015, Peking University, Beijing, China.
- (14) H. Notsu. A stabilized Galerkin-characteristics finite element scheme for the Navier-Stokes equations and its applications. Workshop: Numerical Methods and Analysis for Structures and Singularities in Fluids, December 9, 2014, Nagoya University, Nagoya, Japan.
- (15) H. Notsu. A stabilized Galerkin-characteristics finite element scheme for the Navier-Stokes equations: theory, computations and applications. International Conference on Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future, November 14, 2014, Waseda University, Tokyo, Japan.
- (16) H. Notsu and M. Tabata. Stabilized Galerkin-characteristics finite element schemes for flow problems. The Ninth International Conference on Engineering Computational Technology (ECT 2014), September 5, 2014, Royal Continental Hotel, Naples, Italy.
- (17) H. Notsu. A stabilized characteristics finite element scheme for three-dimensional flow problems. The Fifth China-Japan-Korea Conference on Numerical Mathematics, August 27, 2014. Ningxia University, Yinchuan, China.
- (18) H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a stabilized characteristics finite element scheme for the Navier-Stokes equations. International Congress of Mathematicians (ICM 2014), August 19, 2014. Coex, Seoul, Korea.
- ・国内学会等:
- (19) 二井滉太, 野津裕史. 3次元移流問題のためのアダプティブ Lagrange-Galerkin スキーム. 第14回応用数理学会研究部会連合発表会, 2018年3月15日, 大阪大学, 大阪.
- (20) 野津裕史, 二井滉太. アダプティブメッシュを用いた移流方程式の数値計算. 北陸応用数理研究会 2018, 2018年2月19日, 石川県政記念 しいのき迎賓館, 金沢.
- (21) 山本大輝, 木村正人, 田中良巳, 野津裕史. Maxwell-Zener 粘弾性モデルの勾配流構造とその数値解法. 日本応用数理学会 2017年度年会, 2017年9月6日, 武蔵野大学, 東京.
- (22) 二井滉太, 野津裕史. アダプティブ Lagrange-Galerkin 法による2次元移流問題の数値計算. 日本応用数理学会 2017年度年会, 2017年9月6日, 武蔵野大学, 東京.
- (23) 野津裕史. 非圧縮流れ問題のための安定化 Lagrange-Galerkin スキームの誤差評価. 第6回岐阜数理科学研究会, 2017年8月11日, 岐阜大学サテライトキャンパス, 岐阜.
- (24) H. Notsu. Numerical analysis of viscoelastic fluid models. 東京大学数値解析セミナー, 2017年6月13日, 東京大学大学院数理科学研究科, 東京.
- (25) 二井滉太, 野津裕史. アダプティブ Lagrange-Galerkin スキームの開発. 第22回計算工学講演会, 2017年6月1日, ソニックシティ, 大宮.
- (26) 山本大輝, 木村正人, 田中良巳, 野津裕史. Maxwell 粘弾性モデルの数値解析. 第22回計算工学講演会, 2017年5月31日, ソニックシティ, 大宮.
- (27) 野津裕史. Oseen 型 Peterlin 粘弾性流体モデルのための線形 Lagrange-Galerkin スキーム. 研究集会「数値解析の理論と実践」, 2017年3月22日, 石川県政記念 しいのき迎賓館, 金沢.
- (28) H. Notsu. Computation and numerical analysis of viscous and viscoelastic fluid flows. Workshop on Numerical Methods and Analysis for Structures and Singularities in Fluids II, January 30, 2017. Nagoya University, Nagoya.
- (29) 野津裕史. 流体粒子の軌跡を利用した数値解法とその数値解析. 第3回金沢・山口数学合同研究集会:幾何学とその諸分野への応用, 2016年12月18日, 金沢大学, 金沢.
- (30) 後藤典子, 野津裕史. セマフォリンシグナルによるがん幹細胞の対称性分裂の制御. 金沢大学先魁プロジェクト「幹細胞とがんの数理生物学」シンポジウム, 2016年11月24日, 金沢大学, 金沢.
- (31) 野津裕史. 現象のモデリングとシミュレーション: 流体を例に. スパコン産学連携利用・人材育成セミナー in 北陸, 2016年11月21日, 北陸先端科学技術大学院大学, 金沢.
- (32) 野津裕史, 田端正久, M. Lukacova, H. Mizerova. Oseen 型拡散 Peterlin モデルのための安定化 Lagrange-Galerkin スキ

- ームの誤差評価. 第21回計算工学講演会, 2016年6月2日, 新潟コンベンションセンター, 新潟.
- (33) 野津裕史, 田端正久, M. Lukacova, H. Mizerova. Oseen 型拡散 Peterlin モデルのための安定化 Lagrange-Galerkin スキームの誤差評価. 日本数学会, 2016年3月19日, 筑波大学, つくば.
- (34) H. Notsu. Linear and nonlinear schemes for an Oseen-type diffusive Peterlin model. The 4th Workshop on Mathematical Analysis for Nonlinear Phenomena, Feb. 13, 2016. Kanazawa University, Kanazawa.
- (35) 野津裕史. ポリマー流体のための数値計算スキームについて. RIMS 研究集会: 現象解明に向けた数値解析学の新展開, 2015年11月19日, 京都大学, 京都.
- (36) 野津裕史. Numerical analysis of Lagrange-Galerkin methods. 東北大学 応用数学セミナー, 2015年6月11日, 東北大学, 仙台.
- (37) 野津裕史, 田端正久. 自然対流問題のための Galerkin 特性曲線有限要素法の誤差評価. 日本数学会, 2015年3月24日, 明治大学, 東京.
- (38) 野津裕史. 安定化 Lagrange-Galerkin スキームによる流れ問題の数値計算. 北海道大学 Mathematical Modeling 倶楽部 (HMMC) セミナー, 2015年3月20日, 北海道大学, 札幌.
- (39) 野津裕史, 田端正久. 自然対流問題のための安定化 Galerkin 特性曲線有限要素スキームの誤差評価. 2014年度応用数学合同研究集会, 2014年12月20日, 龍谷大学, 大津.
- (40) 野津裕史. Navier-Stokes 方程式のための ALE 安定化特性曲線有限要素スキームの開発. 研究集会「CoMFoS14(特異性を持つ連続体力学 2014)」, 2014年10月12日, 京都大学, 京都.
- (41) 野津裕史. 領域変形を伴う流れ問題のための特性曲線有限要素法の開発. 研究集会「第3回岐阜数理科学研究会」, 2014年9月9日, 高山市, 岐阜.
- (42) 野津裕史. 流体粒子の軌跡と流れの計算法. ロバスト幾何計算連続講演会 2014年度第4回講演会, 2014年7月2日, 明治大学先端数理科学研究科, 東京.
- (43) 野津裕史, 田端正久. Navier-Stokes 方程式のための安定化特性曲線有限要素スキームの安定性と収束性. 第19回計算工学講演会, 2014年6月12日, 広島国際会議場, 広島.

[その他]

ホームページ等

<http://scheme.hn/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

野津裕史 (NOTSU, Hirofumi)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号: 00588783