

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 28 日現在

機関番号：16401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26800154

研究課題名(和文) 格子フェルミオンに対する新手法を用いた低温有限密度量子色力学の研究

研究課題名(英文) Study of QCD at low temperature and finite density with a new technique for lattice fermions

研究代表者

永田 桂太郎 (Nagata, Keitaro)

高知大学・教育研究部医療学系連携医学部門・助教

研究者番号：00586901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：素粒子・原子核物理学における長年の挑戦的課題である有限密度格子QCDを格子フェルミオンの新手法を用いて研究した。当初はWilsonフェルミオン縮約公式を用いたが、縮約公式の低温有限密度領域への応用において既存の固有値ソルバーでは解けない問題が生じることがわかり、複素ランジュバン法(CLM)を用いた研究に着手した。ゲージクーリングの正当性の証明、CLMの収束判定条件の導出など理論づけの整備とゲージクーリング法の改良などの新手法の開発を行い、低温有限密度格子QCDへの応用を行った。本研究の目標であった、パイ中間子質量の半分を超える化学ポテンシャル領域のシミュレーションを達成した。

研究成果の概要(英文)：We have studied finite density lattice QCD, which is a longstanding issue in particle and nuclear physics, by using new techniques for lattice fermions. We first employed an approach based on a reduction formula of the lattice Wilson fermions, but it turned out to be difficult to solve an eigenvalue problem for the reduced matrix at low temperatures and finite densities. Then, we started using the Complex Langevin method(CLM), which was also a new development around 2015. We conducted theoretical studies of CLM: proof of the gauge cooling, reduction of criteria of correctness of CL simulations, and also developed a new technique with the generalization of the gauge cooling method. Based on those studies, we conducted CL simulations of QCD at low temperatures and finite densities, and achieved to simulate a targeted domain, chemical potential beyond half the pion mass, with satisfying criteria of correctness. Thus, we accomplished the purpose of this project.

研究分野：QCD

キーワード：符号問題 低温有限密度QCD

## 1. 研究開始当初の背景

原子核や中性子星などの物質が素粒子であるクォークとグルーオンから形成される仕組みは、第一原理計算である有限密度格子 QCD に現れる符号問題のために、QCD の確立から半世紀近くを経た現在でも謎に包まれている。符号問題は有限密度 QCD だけでなく様々な分野で生じており、その解決は現代物理学の重要テーマの1つである。

有限密度格子 QCD は 1980 年頃から研究されてきたが、2000 年代に多くの発展があり、 $T_c$  (閉じ込め-非閉じ込め相転移点) 近傍の高温・低密度物質に対してはテイラー展開や Reweighting 等の方法が一定の成果を収めた。一方、原子核や中性子星に関連する低温・有限密度領域に対しては、物理的に妥当な結果を再現することができていなかった。2010 年頃にはこの領域がとりわけ挑戦的な課題であるという理解が広く共有されつつあった。

低温・有限密度領域における困難を表す象徴的な事例として、クォーク数の増加が  $\mu = m/2$  から生じるという非物理的な結果が様々な研究で報告されていた [e.g. Barbour(1986)]。ここで  $\mu$  はクォーク化学ポテンシャル、 $m$  は中間子質量を表す。以下では、この問題を「クォーク数増加の問題」と呼ぶ。研究代表者永田らはこの問題に対して Wilson フェルミオン行列式に対する縮約公式 [Nagata, Nakamura(2010)] とその零温度極限を用いて、縮約行列の固有値の性質とクォーク数の非物理的増加の関連を示唆する結果を得ていた [Nagata et. al. (2012)]。

研究開始当初の関連する実験・観測の状況としては、太陽質量 2 倍を超える中性子星が発見され、クォーク/ハドロンの物質に対する模型計算の大半が観測と矛盾することが明らかとなった。RHIC において QCD 臨界点を探索する BES 実験でも、QCD 臨界点に関する模型計算に深刻な模型依存性があることが指摘されていた [Stephanov(2007)]。このよう

に観測・実験の面からも、信頼できる理論研究、すなわち格子 QCD 研究の必要性が高まっていた。

## 2. 研究の目的

本研究は、研究開始当初に残されていた課題である低温・有限密度領域、特に  $\mu = m/2$  を越えた領域に対する格子 QCD 計算の遂行を目的として研究を開始した。この領域を解析する方法が構築できれば、QCD 相図の解明が飛躍的に進む。

## 3. 研究の方法

本研究では 2 つの方法、(1)フェルミオン行列式の縮約公式を用いた方法、(2)複素ランジュバン法 (CLM)、を用いて研究を行った。

(1) フェルミオン行列式の縮約公式では、クォークの時間方向の伝搬を記述する縮約行列が現れ、これは、物理的には、転送行列の直積に等しい。縮約行列の固有値にはギャップがあり、そのギャップがクォーク数増加と関係する [Nagata et. al. 2012]。これは転送行列の固有値がエネルギー準位 (厳密には内部エネルギーの指数) を表すことに起因している。この対応関係から、ギャップ近傍の固有値の性質とクォーク数増加の問題の相関が示唆される。

しかしながら、縮約公式を用いたシミュレーションでは、全固有値計算がボトルネックとなり、固有値の詳細な解析が困難であった。そこで、留数定理を応用して特定の固有値を抜き出す Sakurai-Sugiura 法に注目した。

(2) 複素ランジュバン法は 1983 年に開発されたが [Parisi, Klauder]、非物理解への誤収束の問題が知られていた。2009, 2011 年に Aarts らが物理解への収束条件の導出に成功したことで再度脚光を浴び、2013 年には Sexty らが高温・有限密度 QCD への応用を達成した。しかし、CLM の低温への応用では、ドリフト項

の特異点に起因した誤収束が起こることが指摘されていた[Mollgaard, Splittorff(2013, 2014)]. この問題は特異ドリフト問題と呼ばれており, 実はクォーク数の非物理的増加と発生原因が同一であることがわかっている.

#### 4. 研究成果

##### (1) SS 法による縮約行列の固有値計算

[Futamura, Hashimoto, Imakura, Nagata, Sakurai, PoS LATTICE2014(2014)049.]

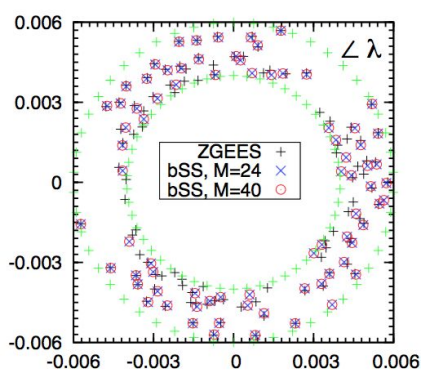


図 1. 縮約行列の固有値分布. ZGEES は LAPACK を用いた厳密計算. bSS は SS 法を用いて円環領域の固有値のみを求めた結果.  $M$  はパラメータ.

では SS 法を用いて円環領域内の固有値計算を行い, 縮約行列に対する SS 法の性能を調べた. SS 法のパラメータを調整することで精度が向上することなどが確認できた.

一方で, 実装に必要な縮約行列の線形方程式計算が非常に悪条件の問題であり, 既存のソルバではこの線形方程式を効率よく解けないことも明らかとなった. より良い線形ソルバが開発されれば縮約行列を用いた計算も可能となるかもしれないが, 既存の行列計算ライブラリでは, QCD に対する SS 法の実装が困難であることがわかった.

この頃, 複素ランジュバン法の QCD への応用が Sexty らによって報告されており, SS 法の代替案として, 複素ランジュバン法の研究を開始した.

##### (2) 複素ランジュバン法の研究

[Nagata, Nishimura, Shimasaki, PTEP no.1, 013B01(2016)]

QCD の複素ランジュバンシミュレーションの実現にはゲージクーリングが重要な役割を果たすが[Sexty(2013)], ゲージクーリング法は発見法的に構築されたため, その理論的正当性が不明であった. では, ゲージクーリング法の理論的正当性の証明を与えた.

[Nagata, Nishimura, Shimasaki, PoS LATTICE2015 (2016) 156; JHEP1607(2016)073]

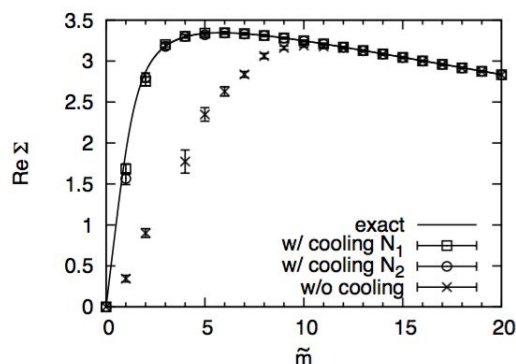


図 2. cRMT におけるカイラル凝縮の期待値を複素ランジュバン法で計算した結果.  $m\sim$  は補正されたクォーク質量. 実線は厳密解.

ゲージクーリング法は, (拡張された)ゲージ不変性を用いてユニタリティノルムを抑制する方法として提案された. では, ゲージクーリング法の対象となる対称群およびクーリングノルムが拡張可能であることを指摘し, カイラルランダム行列理論(cRMT)の低温・高密度領域の研究を行った.

図 2 は複素ランジュバン法を零温度・有限密度の cRMT に応用し, カイラル凝縮の期待値を求めた結果である. ゲージクーリングを行わない場合(w/o cooling)では,  $m\sim < 10$  において CLM の結果が厳密解から逸脱するが, ゲージクーリングを導入した場合(w/cooling),  $m\sim = 2$  程度まで厳密解を再現することができた. 前者はクォーク数の非物理的増加と同種

の問題によりシミュレーションが破綻した状況であり、後者はゲージクーリングによってその問題が解決したことを示している。QCD への応用が期待される成果である。

[Nagata, Nishimura, Shimasaki, PRD94, no.11, 114515(2016)]

[Shimasaki, Nagata, Nishimura, PoS LATTICE2016(2016)071; Nagata, Nishimura, Shimasaki, JHEP05(2018)004]

Aarts らの CLM の正当性条件は場の変数の確率分布を扱っており、条件が定性的であることや、高次元理論への応用が数値的に難しいことなどの課題があった。

では、ドリフトの確率分布を用いた CLM 正当性判定条件を導出した。具体的には、ドリフトの確率分布の裾が指数的あるいはそれより早く減衰するとき CLM 計算が正しい解に収束したと判断できる。この条件は定量的であり、また、追加の計算コストが不要という従来の方法の弱点を克服した方法となっている。では、この判定条件を厳密解が求まる 2 つの理論、2 次元 Yang-Mills 理論および cRMT、に応用し、いずれの場合においても、ドリフトの確率分布を用いた判定条件が CLM の正当性の良い判定条件となっていることを実証した。この結果は厳密解のわからない高次元理論に対する複素ランジュバンシミュレーションにおいても正当性判定を遂行可能とした重要な成果である。実際、Aarts らの判定条件はあまり利用されていないが、この条件は最近の文献で実際の応用が始まっている[Basu et al 2018].

[Nagata, Matsufuru, Nishimura, Shimasaki, PoS LATTICE2016(2016)067]

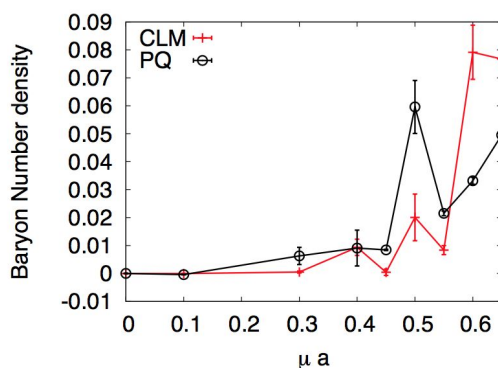


図 3. CLM を用いて求めた QCD のバリオン数密度の化学ポテンシャル依存性。格子サイズ  $4^3 \times 8$  で零温度のシミュレーションに相当する。

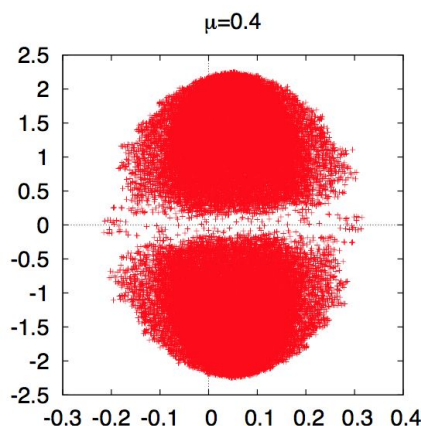


図 4. 図 3 のシミュレーションで得られたディラック固有値分布。

から までの成果に基づき、複素ランジュバン法を低温・有限密度格子 QCD へ応用した。ゲージクーリング法を用いてシミュレーションを行い、ドリフト項の確率分布を用いて得られた結果の正当性を判定した。

図 3 は、ゼロ温度 QCD のバリオン密度の化学ポテンシャル依存性を表しており、比較のために、位相クエンチ(PQ)の結果が示してある。特異ドリフト問題が発生した場合の顕著な振る舞いとして位相クエンチの結果が再現されるというものがあるが、図では  $\mu a = 0.3 \sim 0.4$  の領域で CLM と PQ の結果に差が見

られ、CLMの結果は0.3程度までクォーク数密度が0を維持している。強結合QCDから概算すると  $m_\pi/2=0.25$  程度であるので、図の結果は  $\mu > m_\pi/2$  の領域で誤収束を起こすことなく格子QCDシミュレーションを遂行できているものと考えられる。

CLMで得られたディラック固有値の分布を表したのが図4である。ゲージクーリングを用いたことで、原点近傍のディラック固有値が除去されて、特異ドリフト問題の発生を回避できている。図3および図4の結果は、これまでの格子QCDの数値シミュレーションの中で、クォーク化学ポテンシャルが中間子質量の半分を越えた領域で、位相クエンチへの誤収束を起こさずシミュレーションを遂行した初の成果であり、本研究の目標を達成することができた。

図3,4のシミュレーションは格子が小さく、格子体積の増加が必要となる。格子体積の増加に従って、特異ドリフト問題も厳しくなることから、より効率の良い符号問題解法の提案も必要となる。現在は、このような方向の研究も進めており、近日中に成果を公表する予定である。さらに、バリオン物質形成が生じる化学ポテンシャル0.6~0.7程度の領域で正当性条件を満たしたシミュレーションができるかどうか有限密度格子QCD解明に向けた今後の重要課題である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計14件)

[1] Keitaro Nagata, Jun Nishimura, Shinji Shimasaki, "Testing the criterion for correct convergence in the complex Langevin method", JHEP05(2018)004.  
DOI: 10.1007/JHEP05(2018)004

[2] Keitaro Nagata, Jun Nishimura, Shinji Shimasaki, "Complex Langevin simulation of QCD at finite density and low temperature using the deformation technique", EPJ Web Conf. 175 (2018) 07017.  
DOI: 10.1051/epjconf/201817507017

[3] Shinji Shimasaki, Keitaro Nagata, Jun Nishimura, "On the condition for correct convergence in the complex Langevin method", PoS LATTICE2016 (2016) 071-078.

[4] Keitaro Nagata, Hideo Matsufuru, Jun Nishimura, Shinji Shimasaki, "Gauge cooling for the singular-drift problem in the complex Langevin method -- an application to finite density QCD", PoS LATTICE2016 (2016) 067-074.

[5] Sinya Aoki, Etsuko Itou, Keitaro Nagata, "Entanglement entropy for pure gauge theories in 1 + 1 dimensions using the lattice regularization", Int. J. Mod. Phys. A31 (2016) no.35, 1650192.  
DOI: 10.1142/S0217751X1650192X

[6] Keitaro Nagata, Jun Nishimura, Shinji Shimasaki, "Argument for justification of the complex Langevin method and the condition for correct convergence", Phys. Rev. D94 (2016) no.11, 114515.  
DOI: 10.1103/PhysRevD.94.114515

[7] Keitaro Nagata, Jun Nishimura, Shinji Shimasaki, "Gauge cooling for the singular-drift problem in the complex Langevin method - a test in Random Matrix Theory for finite density QCD", JHEP 1607 (2016) 073.  
DOI: 10.1007/JHEP07(2016)073

[8] Terukazu Ichihara, Keitaro Nagata, Kouji Kashiwa, "Test for a universal behavior of Dirac eigenvalues in the complex Langevin method", Phys. Rev. D93 (2016) no.9, 094511.  
DOI: 10.1103/PhysRevD.93.094511

[9] Etsuko Itou, Keitaro Nagata, Yoshiyuki Nakagawa, Atsushi Nakamura, V.I. Zakharov, "Entanglement in Four-Dimensional SU(3) Gauge Theory", PTEP 2016 (2016) no.6, 061B01.  
DOI: 10.1093/ptep/ptw050

[10] Keitaro Nagata, Jun Nishimura, Shinji Shimasaki, "Testing a generalized cooling procedure in the complex Langevin simulation of chiral Random Matrix Theory", PoS LATTICE2015 (2016) 156.

[11] Keitaro Nagata, Jun Nishimura, Shinji Shimasaki, "Justification of the complex Langevin method with the gauge cooling procedure", PTEP 2016 (2016) no.1, 013B01.  
DOI: 10.1093/ptep/ptv173

[12] LATTICE-ZN Collaboration, "Net-Baryon Multiplicity and QCD Phase Diagram", PoS CPOD2014 (2015) 021.

DOI: 10.22323/1.217.0021

[13] Yasunori Futamura, Shoji Hashimoto, Akira Imakura, Keitaro Nagata, Tetsuya Sakurai, “A filtering technique for the temporally reduced matrix of the Wilson fermion determinant”, PoS LATTICE2014 (2015) 049.  
DOI: 10.22323/1.214.0049

[14] Keitaro Nagata, Kouji Kashiwa, Atsushi Nakamura, Shinsuke M. Nishigaki, “Lee-Yang zero distribution of high temperature QCD and the Roberge-Weiss phase transition”, Phys. Rev. D91 (2015) no.9, 094507.  
DOI: 10.1103/PhysRevD.91.094507

〔学会発表〕(計 16 件)

[1] Keitaro Nagata, “Recent progress in finite density lattice QCD towards high density”, Exploration for QCD phase diagram, Busan, May 26-27, 2017. (招待講演)

[2] Keitaro Nagata, “New criterion for correctness in the complex Langevin method –an application to finite density QCD”, XQCD2016, Plymouth, Aug 1-3, 2016.

[3] Keitaro Nagata, “New criterion for correctness in the complex Langevin method –an application to finite density QCD”, LATTICE2016, Southampton, Jul 24-30, 2016.

[4] Keitaro Nagata, “Testing a generalized cooling procedure in the complex Langevin simulation of chiral Random Matrix Theory”, LATTICE2015, Kobe, Jul 14-18, 2015.

[5] Keitaro Nagata, “A new method for fermionic singular drift problem in the complex Langevin method”, Sign 2015, Debrecen, Sep 29-Oct 2, 2015.

[6] Keitaro Nagata, “Finite density lattice QCD simulations towards QGP, heavy ion collisions, nuclear matter”, Quarks to Universe in Computational Science, Nara, Nov 4-8, 2015. (招待講演,国際研究会).

[7] 永田桂太郎, “Lee-Yang zero distribution of high temperature QCD and Roberge-Weiss phase transition”, 格子 QCD と現象論モデルによる有限温度・有限密度の物理の解明, 2015 年 2 月, 九州大学 (招待講演).

[8] Keitaro Nagata, “Canonical partition functions and Lee-Yang zeros in QCD”, Hadrons and Hadron Interactions of QCD, Kyoto, Mar 4, 2015. (招待講演,国際研究会).

[9] Keitaro Nagata, “A filtering technique for the

temporally reduced matrix of the Wilson fermion determinant”, LATTICE2014, New York, June 27, 2014.

[10] Keitaro Nagata, “Baryon number distribution in lattice QCD”, Computational Nuclear Physics II, Hawaii, Oct 5-7 2014. (招待講演).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

永田桂太郎 (Nagata Keitaro)

高エネルギー加速器研究機構, 研究員 (2016 年 10 月まで)

高知大学 教育研究部医療学系 連携医学部門, 助教 (2016 年 11 月から現在)

研究者番号 : 00586901