様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ２３ 日現在

機関番号：３３９０３
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2015
課題番号：２６８００２０８

研究課題名（和文）系の対称性を利用した系統的な近似法の開発

研究課題名（英文）Development of the approximation method based on the symmetry of systems

研究代表者
巌佐　正智（Iwasa, Masatomo）

愛知工業大学・工学部・准教授

研究者番号：２０４４４３７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,200,000円

研究成果の概要（和文）：微分方程式を厳密に解くのには困難を伴うことが多く，有用な近似法の開発が望まれる．本研究では，偏微分方程式を対象に，系のもつ対称性を利用した近似法を開発した．特にこの近似法は非線型性を摂動として含むタイプの系に対して有効である．従来のこの種の方法は，偏微分方程式における独立変数の増加により，そのまま適用することは不可能であった．しかし，偏微分方程式では無摂動解の選び方に任意性があるため，ベースとなる無摂動系の解を定め，その解から拘束条件を構成して，系のなす空間の次元を減らして対称性を探すと，近似解の構成に有用な対称性を見出せることが解った．

研究成果の概要（英文）：Approximation methods are required when a differential equation is difficult to be exactly solved. In this study, a new approximation method is developed for partial differential equations in terms of the symmetry of the system. This method specifically works when we analyze perturbation problems. When we try to apply conventional method of this type developed before to partial differential equations, due to the increase of the independent variables, the system often has no symmetry necessary for the derivation of approximate solutions. However, it is found in this study that, by fixing a non-perturbation solution, construct constraint equations from it and consider this constraint equations as well as the original system, we can find symmetries which can be used to derive approximate solutions of the system.

研究分野：非線形動力学

キーワード：非線形動力学　数理物理学　漸近解析　くりこみ群

1．研究開始当初の背景

物理学において，近似法は重要な役割を果たしてきた．適切な近似法の適用により，現象の詳細に起因する余計な効果を切り捨てることで，現象の普遍性が明らかになることもある．その点で，適切な近似法の開発は重要な研究課題である．一方，物理学における重要な概念として対称性がある．例えば，ある系（モデル）に対称性が見出されると，それによってモデルの解を生成することができる．これまでに，数学的な手法として，任意の微分方程式系に対して，その微分方程式系が持つ対称性を見出して解を構成する系統的な方法，いわゆる Lie 対称性の方法が確立している[1]．このように，解と対称性の間には密接な関係があるので，様々な方法による近似解の良し悪しも，系の有する対称性と何らかの関係があるのではないかと予想される．報告者はこの点に着目し，系の対称性をなるべく保持するような近似解の構成方法の開発に取り組んできた．

報告者は本研究課題開始以前に，常微分方程式系と差分方程式系に対して，Lie 対称性の方法を拡張し，近似的な対称性を見出して，その対称性から近似解を構成する方法である「Lie 対称性を用いた近似法」を考案した．この方法を，特に非線型項を摂動として含む弱非線型系に適用した場合，その漸近解を構成できる．この方法の利点は，任意の方程式に対して適用可能な，系統的な手法である点である．以前より，弱非線型系の解析手法は幾つも提案されており，結果として全て同じ漸近解が得られることが判っている[2-4]．それらの方法は総称して特異摂動法と呼ばれており，この意味で「Lie 対称性を用いた近似法」は特異摂動法を特別な場合として含んでいる．ただ，従来の特異摂動法は，素朴な摂動展開により構成した近似解が発散する場合に限り，発散を取り除くために施される処方箋であり，方程式を見た時点では用いるべきかどうかは不明であった．一方，「Lie 対称性を用いた近似法」は，任意の方程式に施すことができ，この不便が解消されたといえる．

しかし，この近似法の適用対象は常微分方程式や差分方程式系に限られており，対称性を利用した同様の手続きが偏微分方程式などその他の記述形式まで有効かどうかは不明であった．

[1] P. J. Olver, “Applications of Lie Group to Differential Equations”, Springer-Verlag (1986). [2] L. Y. Chen et al. *Physical Review E* **54** 376 (1996). [3] N. N. Bogiliubov and C. M. Place, “Asymptotic Methods in theTheory of Nonlinear Oscillations”, Gordon and Break (1961). [4] A. H. Nayfeh, “Method of Normal Forms”, John Wiley & Sons, INC. (1993).

2．研究の目的

以上の背景を踏まえ，本研究は，系の近似的な対称性を探し，それに基づいて近似解を構成する手法である「Lie 対称性を用いた近似法」を適用できる対象を，偏微分方程式系や汎関数系にまで広げることを目的とする．

まずは，偏微分方程式系を対象として，「Lie 対称性を用いた近似法」を構成することを目指す．偏微分方程式に対しては，既に複数の近似法が知られている[5, 6]が，それらが有効に機能する方程式系の範囲は不明瞭である．一方，Lie 対称性の方法の利点は，任意の方程式系に適用できる汎用性にある．本研究を通じ，扱う方程式系に依存しない一般的な近似法の構築を目指す．

その後，汎関数系を対象として，「Lie 対称性を用いた近似法」を構成することを目指す．汎関数は，現代の物理学では欠かせない記述形式であり，やはり系統的な手続きによって良い結果を導出できる近似法が望まれる．汎関数系に対する有用な近似法としては既に「くりこみ群の方法」が知られている[7]が，これは汎関数に対して特定の対称性（スケール対称性）を要請しており，適用可能な系が限られる．一方，本研究で確立する「Lie 対称性を用いた近似法」は，汎関数の有する対称性を探し，それを保つように漸近解を構成するため，より適用範囲の広い方法となると予想される．

以上の課題の達成を通じ，既存の近似法の数理的な理解を目指す．特に重要な近似法として，「くりこみ群の方法」に注目する．「くりこみ群の方法」は場の理論において，場の結合定数の漸近的な挙動を得る方法として知られている[7]．一方，常微分方程式に対しては，漸近解を得る手法として「くりこみ群の方法」がある[2]．また，偏微分方程式の漸近挙動を得るための「くりこみ群の方法」もある[5].これらが全て同じ名前で呼ばれるのは，物事の漸近的な振る舞いを取り出すという思想が似ているからであるが，類似した思想に基づく以上，これらは何らかの数理的な共通点を持つと考えられ本研究でそれを探究する．

本研究の目的は，記述形式の違いを超えて機能する近似法の確立にあり，その知見を通じて，既存の近似法を数理的な観点から理解することである．

[5] J. Bricmont et al. *Commun. Pure. Appl. Math.* **13** 894. [6] S. Sasa, *Physica D* **108** 45. [7] K. G. Silson and J. Kogut, Physics Report 352 219 (1998).

３．研究の方法

まず申請者がこれまで常微分方程式系に対して開発した近似法である「Lie 対称性を用いた近似法」の対象を偏微分方程式系にまで拡張する．すなわち，解くべき偏微分方程式に対し，Lie 対称性の方法によって，それを近似的に不変に保つ変換群(対称性)を探し，その群から近似解を生成する方法を構成する．この方針は，常微分方程式系に対して開発した方法の方針と同様である．偏微分方程式系に対しては，既に幾つかの種類の有効な近似法が知られている[5, 6]．常微分方程式系での場合がそうであったように，それらの近似法も全て，対称性の観点から統一的な理解が可能であると予想している．すなわち，本研究で開発する一般的な近似法は，それらの既存の方法を特別な場合として含むと考えられる．これはまた，既存の有効な方法と無矛盾であるための十分条件でもある．既存の方法との間の，この包含関係を指針とすることで，より効率的に方法の開発を進める．

その後，常・偏微分方程式系に対して構築した「Lie 対称性を用いた近似法」の対象を，汎関数系にまで拡張する．これまでに知られる Lie 対称性の方法は，微分方程式の解を探す手法であるため，まずは，それを汎関数系に用いるための工夫が必要である．近年，偏微分方程式を，汎関数を用いて書き換える方法が提案されており[8]．どちらの記述形式に対しても同じ結果が得られるべきという条件の下，汎関数の対称性（汎関数系を不変に保つ変換群）を系統的に探し出す方法を見出す．すなわち，汎関数系に対する Lie 対称性の方法を考案する．この準備の後，汎関数系に対する「Lie 対称性を用いた近似法」を構築する．すなわち，汎関数系の近似的な対称性を探し出し，それに付随する群が生成する解によって近似解を得る近似法を確立する．ここでもやはり，既存の有効な近似法と整合する様に方法を構成する．特に重要な成果を上げてきた近似法の一つとして「くりこみ群の方法」がある．「くりこみ群の方法」は本研究で提案される方法と類似しており，群の変換に対する汎関数の不変性から漸近解を構成する．しかし，「くりこみ群の方法」では対称性をスケール対称性に限定している．一方，本研究による方法は任意の対称性を許す一般的な方法であるため，スケール対称性を有する汎関数系に対しては，「くりこみ群の方法」と同じ結果を得るはずである．この包含関係も開発の指針として利用する．

[8] S. Yoshida and T. Fukui, *Physical Review E* **72** 046136 (2005)

４．研究成果

本研究の結果，まずは偏微分方程式を対象に，系の Lie 対称性を利用した近似法を開発した．特にこの近似法は非線型性を摂動として含むタイプの偏微分方程式系に対して有効である．

常微分方程式に対する従来の Lie　対称性を用いた近似法は，そのままそれらの偏微分方程式に拡張することは不可能であった．偏微分方程式においては独立変数が増加するため，一般に微分方程式系に含まれる変数の数が微分方程式の階数の増加とともに指数関数的に増大し，微分方程式のなす空間の次元が膨大となる．それによって，方程式を不変に保つ変換群が存在せず，微分方程式の解を構成できないという困難が生じる．

従来の方法に工夫を加えることでこの困難が解決された．一般に摂動問題では，無摂動系の解が摂動によってどのような影響を受けるかを捉える．常微分方程式系では解の一意性から，無摂動系の解には任意性がない．しかし，偏微分方程式系では無摂動解の選び方に任意性がある．よって，摂動の効果を調べるベースとなる無摂動系の解を固定しておき，その解を基に拘束条件を構成して，力学系のなす空間の次元を減らし，拘束条件の加わった偏微分方程式に対する Lie 対称性を探すと，近似解の構成に有用な対称性を見出せることが解った．この結果は論文にまとめ報告した[業績 2]．

その後，汎関数系に対して，対称性を利用した近似法の確立を試みた．現在のところ，まだ系統的な方法の確立には至っていないが，汎関数系を考察対象とする場合にも，偏微分方程式と同様に何らかの拘束条件を加えることによって，系のなす空間の次元を落とし，その制限された空間において対象性を見出す必要があることが判ってきた．

直接的な研究課題と並行し，将来的な応用を見据えた以下のような研究課題も遂行した．まず，細胞移動の長時間挙動についての理解を行った．走化性細胞であるキイロタマホコリカビの細胞は誘引物質による周期的な勾配刺激の下で漸近的に一方向に移動する性質をもつ．その移動機構は不明な点も多いが，我々は現象論的な微分方程式モデルを立て，その長時間挙動を解析して実験事実と照合することで，新たな移動機構を提案した[業績 1]．また，本研究課題と同様の力学系の自由度の低減により漸近挙動が取り出された，相互作用する多粒子集団モデルとして Swarm oscillator モデルがあり，それを解析して多様な粒子配位が見出される数理機構を明らかにした[業績 3, 6, 7]．同様に，双極子集団が示す漸近挙動についても研究を行った[業績 4]．また，多粒子集団が長時間経過後に漸近的に示す統計的性質についても研究し発表した[業績 5]．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）
[1] R. Ishiwata and M. Iwasa, Extracellular and intracellular factors regulating the migration direction of a chemotactic cell in traveling-wave chemotaxis, 査読あり, Physical Biology, Vol. 12, 2015 年, 026004.
DOI: 10.1088/1478-3975/12/2/026004

[2] M. Iwasa, Derivation of Asymptotic Dynamical Systems with Partial Lie Symmetry Groups, Journal of Applied Mathematics, 査読あり, Vol. 2015, 2015年, 601657.
DOI: 10.1155/2015/601657

〔学会発表〕（計　5　件）
[3] M. Iwasa, Collective Behavior in Swarm Oscillator Model, The Joint Annual Meeting of the Japanese Society for Mathematical Biology and the Society for Mathematical Biology, 2014 年 8 月 1 日, Osaka International Convention Center (大阪府大阪市)

[4] M. Iwasa, Long-time behavior of self-assembly of polar particles. Colloquium at Hermans Lab., 2014年9月5日, Institute of Science and Engineering of Supermolecules（ストラスブール，フランス），

[5] 巌佐正智，G. Wilk, B. Grzybowski，現実の様々な生成・成長・消滅する粒子集団に対する生成率・成長率・消滅率の対数正規様分布による見積もり，日本物理学会 2015 年秋季大会，2015 年 9 月 17 日，関西大学（大阪府吹田市）

[6] M. Iwasa, Collective behavior in swarm oscillator model, Special seminar provided by IBS Center for Soft and Living Matter, 2015 年 8 月 19 日, Ulsan National Institute of Science and Technology（ウルサン, 韓国）.

[7] 巌佐正智，走化性振動子の集団挙動について，第 6 回計算統計物理学研究会，2015 年 11 月 21 日，名古屋大学（愛知県名古屋市）

〔その他〕
ホームページ等
http://aitech.ac.jp/~miwasa/

６．研究組織
(1)研究代表者
巌佐　正智（IWASA, Masatomo）
愛知工業大学・工学部・准教授
研究者番号：20444375