

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 12 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26820166

研究課題名（和文）不確かな分布を有する離散時間確率系に対するロバスト制御の理論基盤整備

研究課題名（英文）Development of a theoretical basis of robust control for discrete-time linear stochastic systems with uncertain distributions

研究代表者

細江 陽平 (HOSOE, YOHEI)

京都大学・工学研究科・助教

研究者番号：50726411

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,000,000円

研究成果の概要（和文）：分布の不確かさが確率的ポリトープを用いて表現できるようなランダム行列によりダイナミクスが記述される離散時間線形確率系に対するロバスト制御問題に取り組んだ。そのような系のロバスト安定性を線形行列不等式に基づく条件式で特徴づけることに成功した。その条件式は厳密な値を得ることが難しい期待値を含むことから、その期待値をランダム行列の標本を用いて評価することを通してロバスト安定解析および制御器設計を行う方法を構築した。また、ロバスト制御において安定度を考慮すること等が可能になるよう、その手法をさらに拡張した。

研究成果の概要（英文）：We tackled robust control problems for discrete-time linear stochastic systems with dynamics determined by random matrices whose uncertainties can be described with random polytopes. We successfully characterized robust stability of the systems by linear-matrix-inequality-based inequality conditions. Since the inequality conditions included expectations whose exact values are difficult to obtain, we also developed methods for robust stability analysis and controller synthesis in which the expectations are evaluated with samples of random matrices. Then, we further extended the methods so that more advanced robust control such as taking account of stability degree in the synthesis can be achieved.

研究分野：制御工学

キーワード：確率系 ロバスト制御 ポリトープ 不確かさ 線形行列不等式 リアプノフ不等式

1. 研究開始当初の背景

何らかの制御理論に基づいて実システムを制御しようと試みる際、まずはそのモデルを求めるのが一般的である。とくに、モデル化において実システムが持つ確率的要素の影響が無視できず、かつ単に確率的な外乱入力を想定するのではシステム表現として不十分である場合には、ダイナミクス自体が確率的であるような系をモデルとして扱うことが望ましい。確率系の中でも、そのように確率的なダイナミクスを有するという意味で確率的なものは、ランダムダイナミカルシステムと呼ばれて区別されることがある。ランダムダイナミカルシステムはシステム解析論の観点からその性質の解明が進められている。しかし、その系はシステム表現が高度な確率論に基づいていることから汎用的かつ実用的な制御理論を構築することのハードルが高く、そのような方向性の研究は数が限られているのが現状である。

本研究は、制御対象を離散時間かつ線形なランダムダイナミカルシステムのクラスに限定した上で、制御工学の観点からその系を対象にした安定解析や制御器設計を論じることを目指すものである。離散時間線形ランダムダイナミカルシステムのダイナミクスは係数行列がランダム行列であるような状態方程式で記述でき、より一般的なクラスのランダムダイナミカルシステムに比べてそのシステム表現がシンプルである。よって、一般のランダムダイナミカルシステムを扱う場合に比べて比較の見通しよく制御問題に取り組むことができるものと期待される(以下では離散時間線形ランダムダイナミカルシステムのことを単に確率系と呼ぶことにする)。

なお、そのような確率系を扱う場合においても、確定系を扱う場合と同様にモデル化誤差が生じることは避けられない。とくに、確率系を扱う場合には、その背後にある(すなわちダイナミクスを記述する状態方程式の係数行列の)分布に関するモデル化誤差が含まれる。そのようなモデル化誤差を不確かさとして表現して最終的な制御器設計等で考慮するための方向性はいくつか考えられるが、本研究ではとくに確率的ポリトープと呼ばれるものを用いて確率系の不確かさが表現できる場合に焦点を絞って議論する。確率的ポリトープとは、端点がランダム行列で与えられるポリトープ(図1参照)のことであり、その元もまたランダム行列である。一般に確率的ポリトープ内の異なる元は異なる分布を持つので、そのことを逆に利用すれば、ランダム行列の分布に関する不確かさを確率的ポリトープで表現できる可能性がある。本研究ではこのことを念頭に、確率系の状態方程式の係数行列は確率的ポリト

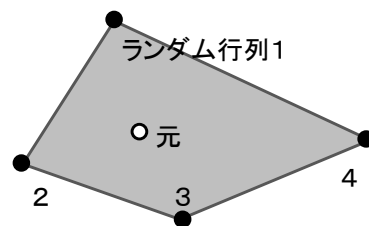


図1: 確率的ポリトープの概念図(端点数4)

ープ内の1点である(ただしどの点であるかは定かではない)とみなし、その確率的ポリトープに関してロバストに(したがって実際の係数行列が確率的ポリトープ内のどの点であるかに依らず)安定性を保証できるようなロバスト安定解析や制御器設計を実現する方法について検討する。より具体的には、以下のような目的で研究を進めることとした。

2. 研究の目的

本研究は、以下に示す3つの研究課題に取り組みを通して、確率的ポリトープで表現される不確かさを持つ確率系に対するロバスト制御の理論基盤を整備することが目的である。

(1) 1つ目の課題はロバスト安定解析に関するものである。不確かさが通常のポリトープで表現される確定系に関しては、そのロバスト安定性を効果的かつ効率的に解析することが可能なロバスト安定条件が導かれている。本課題ではその考え方を応用して、不確かさが確率的ポリトープで表現される確率系に対するロバスト安定条件の導出を目指す。また、導出したロバスト安定条件が保守的である(すなわち実際にはロバスト安定であるのにロバスト安定であると判定できないことが起きる)場合には、その保守性を低減させる方策について検討する。

(2) 2つ目の課題はロバスト安定化制御器設計に関するものである。昨今のシステム制御分野において広く用いられている線形行列不等式最適化のアイデアを活用することで、不安定な確率系をロバスト安定化する制御器を設計することが可能になるような条件式の導出を目指す。また、導出した条件式を実際の設計に用いるための数値的方法についても検討し、数値例によりその有用性を確認する。

(3) 3つ目の課題は、上記ロバスト安定解析および設計手法の高度化に関するものである。1つ目および2つ目の課題で導出する条件式では、システムの最も基礎的な性質である(ロバスト)安定性を保証することのみに議論を限定していた。本課題ではそこから話を一歩前進させ、単に安定性を保証するだけでなく、状態応答の収束性を特徴づける安

定度に関しても評価が可能になるように条件式を拡張することを目指す。また、確率系の背後にある確率分布について、時間依存性の観点から仮定を緩めることができないかについても検討する。

3. 研究の方法

前節で述べた3つの研究課題について、それらに取り組むための具体的な方法を以下に述べる。

(1) まず、ロバスト安定解析に関する課題について述べる。この課題では、不確かさが確率的ポリトープで表現される確率系に対するロバスト安定条件を導出する。とくに、確率的ポリトープの形を決定する有限個の端点のみを用いて、対応する不確かな確率系がロバスト安定であるかどうかを判別できるような、数値計算上都合のよい条件式の導出を試みる。そのような議論の出発点としては、確率的ポリトープの端点を構成するランダム行列の最大特異値の期待値を評価することが考えられる。その期待値の（有限個の端点に関する）最悪値が1より小さくなれば一次平均漸近安定の意味で系はロバスト安定であると結論づけることができそうである。ただし、これと同様の議論を仮に確定系に対して行ったとすると、得られるロバスト安定条件は極めて保守的なものになることから、確率系に対する条件もやはり保守的なものにならざるを得ないのではないかと危惧される。本課題ではまず、上記アイデアに基づく条件式によりロバスト安定性が保証できることを理論的に証明した上で、その条件式の保守性の程度について数値的に確認する。そして、その保守性が無視できないほど大きい場合には、以下の2つの方針によりその保守性の低減をはかる。

(方針1) 確率系の不確かさを表現する確率的ポリトープに関して、その端点の最大特異値（の期待値）をそのまま評価するのではなく、 N 時刻分まとめた状態の遷移を考え、対応する状態遷移行列の最大特異値を評価するようにすることで、保守性の低減をはかる。

(方針2) 条件式中のランダム行列に相似変換の自由度をもたせることで保守性の低減をはかる。

上記方針1に関して、 N を無限に大きくしたとき、対象とする確率系が安定であれば条件式中の最大特異値（の期待値）は0に収束し、不安定であれば発散する。したがって、状態の遷移を考える時間幅 N を数値計算可能な範囲で大きくとることにより、安定と不安定の境界が判別しやすくなり、結果として

上記条件の保守性の低減が見込める。また、上記方針2に関して、安定性の評価は固有値ではなく最大特異値ベースで行われるため、状態方程式における系の状態の取り方によっては必要以上に大きな保守性が生じうる。しかし、相似変換を介せば状態の取り直しがきくので、その自由度を活用することで保守性の低減が見込める。なおこのアイデアはいわゆるリアプノフ不等式の議論に通じるものである。

(2) 次に、ロバスト安定化制御器設計に関する課題について述べる。この課題では、一般に安定とは限らない確率系をロバストに安定化する状態フィードバック制御器を設計するための条件式を導出する。その際、上記ロバスト安定解析の課題で導出したロバスト安定条件を基礎とする。解析と比較した設計の難しさは、主に条件式を用いる際にその単純な成否の判定だけでなく、条件を満たす制御器パラメータを探索する必要がある点にある。本課題では、設計のための条件式を線形行列不等式に基づく形に帰着させることで、その難しさを克服することを考える。そのような議論を確定系に対する従来研究に対応させて解釈したとすると、安定性をリアプノフ不等式で特徴づけた上で、そのリアプノフ不等式に対して伸張や変数変換等の操作を行い、ロバスト安定化制御器設計のための条件式へ変形させるものであると言える。ただし、確率系に対する条件式中には期待値によるランダム性の処理が含まれるため、たとえ条件式が線形行列不等式に基づく形で導出できたとしても、そのまま解くことは現実的には困難であることが想定される。そこで、実際の数値計算においては、扱うランダム行列のサンプルをその分布に応じて可能な限り多く生成し、対応する線形行列不等式を連立して解くことで、設計条件を真に満たす制御器が得られることを期待する近似的な設計を行うことを考える。そのような手法はあくまで近似的であるが、線形行列不等式を連立させる際のサンプル数を（計算負荷とのトレードオフを通して）大きくとることができれば、ランダム性の評価に関して十分なレベルまで精度を引き上げることができると考える。また、得られた結果が確かに信頼に足るものであることを確認するための信頼率も、中心極限定理を用いれば設計後に評価することが可能である。

また、本課題では、系の入出力信号を N 周期ごとにまとめて取り扱うリフティングと呼ばれる時間的な操作を上記制御器設計に活用することで、より安定性を増すような設計が可能にならないかも併せて検討する。

(3) 最後に、ロバスト安定解析および設計手法の高度化に関する課題について述べる。この課題では、その他の課題で整備したロバ

スト安定解析および設計法の実用性をさらに高めることを試みる。より具体的には、得られた成果を以下の2つの方針でさらに拡張することを検討する。

(方針1) 確率系の状態応答の収束性能に関して保証を与えられるよう、その指標の1つである安定度を評価できる形に条件式を拡張する。

(方針2) ランダム行列が各時刻でとる値が前の時刻での値に依存するような現実的な状況に対応するため、ダイナミクスを決めるランダム行列の値が有限モードマルコフ連鎖に依存して定まるような確率系に対するロバスト安定解析および制御器設計の可能性について検討する。

ロバスト安定解析および制御器設計の課題で導出する条件式はいずれも、ある期待値が1未満になることをもって安定性が保証されることになる。上記方針1は、その安定性の基準となる値(すなわち1)を開区間(0, 1)に属するようなパラメータ λ によって一般化することにより、この λ の値で収束性能の評価を可能にしようとするものである。そのような拡張は自然であり、また数値計算上も新たな問題は生じないと考えられる。また上記方針2に関しては、確率系の状態空間を拡大することを許容すれば、ロバスト安定解析および制御器設計の課題で導出される条件式を活用できる可能性があり、このことの検討を中心に研究を進める。

4. 研究成果

前節で述べた方法による研究遂行を通して得られた成果を以下に紹介する。

(1) まず、ロバスト安定解析に関する課題に取り組むことで得られた成果について述べる。前節で述べた最大特異値を用いるアイデアにより、基礎的なロバスト安定条件が導けることを示した。また、その条件は無視できないほど保守性が大きいことが数値的に確認されたので、前節で述べた2つの方針によりその保守性を低減することを試みた。N時刻分の状態遷移を考える方針1については、そのNを大きくすることによりロバスト安定解析における保守性が大きく低減されることが数値的に確認できた。また、相似変換を用いる方針2についても保守性の低減がある程度見込めることが明らかになった。以上の成果は、学会発表[8]、[9]等で発表した。なお、方針2による保守性低減に関しては、3つ目の課題である、ロバスト安定解析および設計手法の高度化に関する課題に取り組む過程でさらに議論が深化し、さらなる保守性の低減が可能であることが明らかになった。

かになった。

(2) 次に、ロバスト安定化制御器設計に関する課題に取り組むことで得られた成果について述べる。本課題では、線形行列不等式最適化の考え方を活用して、上記で得られたロバスト安定条件(とくに相似変換のアイデアを用いたもの)を制御器設計のための条件式に拡張することについて検討し、それが可能であることを示した。また、確率系の状態方程式の係数行列であるランダム行列の標本を用いて制御器設計を行う方法を構築し、それによりロバスト安定化を達成する制御器が得られることを数値的に確認した。この成果は学会発表[8]等で発表した。また、本課題ではリフティングを用いた設計についても検討し、そのような設計が可能であることを明らかにした。この成果は学会発表[4]で発表した。

(3) 最後に、ロバスト安定解析および設計手法の高度化に関する課題に取り組むことで得られた成果について述べる。本課題ではまず、前節で述べた安定度を評価するための方針1について検討し、そのような条件式の拡張が可能であることを明らかにした。この成果は学会発表[1]等で発表した。なお、この検討の過程で、条件式の保守性に関して大きなブレイクスルーがあり、少なくとも不確かでない確率系に対してはその安定性を保守性なく解析できるような条件式を示すことができた。この事実とそれに付随する成果は、今後の同研究の発展において極めて重要な役割を果たすものになると期待される。また、有限モードマルコフ連鎖依存の確率系に関する方針2の高度化については、少なくとも状態空間を拡大すればそのような確率系が扱えることを示した。ただし、単にそのように系を扱うのでは、確率的ポリトープで表現することが難しい不確かさのクラスが存在することが明らかになったので、そのような不確かさについても解析や設計で考慮できるよう、確率的ポリトープの族のようなものを導入することを検討した。これにより、上記の系についても一般的な形でその不確かさを取り扱うことが可能になった。これらの成果は学会発表[3]、[6]、[7]等で発表した(学会発表[7]に関して2015年度計測自動制御学会学術奨励賞研究奨励賞を受賞した)。なお、本課題については上記内容に限らない高度化(ないし拡張)についても検討し、ゲインスケジューリングという考え方をを用いた制御手法に関する成果を学会発表[5]等で、マルコフ過程依存の確率系に関する成果を学会発表[2]で発表した(学会発表[2]に関して第59回自動制御連合講演会優秀発表賞を受賞した)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計 17 件)

- [1] 細江陽平, 萩原朋道, 確率的なダイナミクスを有する線形系に対するリアプノフ不等式, 第 4 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 2G3-4 (7 ページ原稿), 岡山大学 (岡山県・岡山市), 2017 年 3 月.
- [2] 細江陽平, 萩原朋道, マルコフ過程依存の離散時間確率系のロバスト安定解析, 第 59 回自動制御連合講演会, ThA4-4, pp. 83--86, 北九州国際会議場 (福岡県・北九州市), 2016 年 11 月.
- [3] Y. Hosoe, Y. Nagira and T. Hagiwara, Random polytope representation of discrete-time uncertain stochastic switched systems and robust stabilization, 15th European Control Conference, FrA8.1, pp. 2029--2034, Aalborg, Denmark, July 2016.
- [4] Y. Hosoe and D. Peaucelle, S-variable approach to robust stabilization state feedback synthesis for systems characterized by random polytopes, 15th European Control Conference, FrA7.6, pp. 2023--2028, Aalborg, Denmark, July 2016.
- [5] Y. Nagira, Y. Hosoe and T. Hagiwara, Gain-scheduled state feedback synthesis for systems characterized by random polytopes, 54th IEEE Conference on Decision and Control, TuB03.3, pp. 741--746, 大阪府立国際会議場 (大阪府・大阪市), December 2015.
- [6] Y. Hosoe and T. Hagiwara, Extension of the concept of random polytopes and robust stabilization synthesis, 14th European Control Conference, FrA13.2, pp. 2858--2863, Linz, Austria, July 2015.
- [7] 細江陽平, 萩原朋道, 確率的ポリトープの概念的拡張とロバスト安定化設計, 第 57 回自動制御連合講演会, 1D03-1, pp. 235--241, ホテル天坊 (群馬県・渋川市), 2014 年 11 月.
- [8] Y. Hosoe and T. Hagiwara, State feedback synthesis for robust stabilization of discrete-time linear systems characterized by stochastic polytopes, 13th European Control Conference, WeB7.6, pp. 612--617, Strasbourg, France, June 2014.
- [9] Y. Hosoe and T. Hagiwara, Robust

stability analysis of discrete-time linear systems characterized by stochastic polytopes, 2014 American Control Conference, FrB17.3, pp. 4973--4978, Portland, USA, June 2014.

他 8 件

6. 研究組織

(1) 研究代表者

細江 陽平 (HOSOE, YOHEI)
京都大学・工学研究科・助教
研究者番号: 50726411