

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 4 日現在

機関番号：14401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26870110

研究課題名(和文)多体電子系に対する厳密な解析方法の構築

研究課題名(英文)Rigorous construction of many-electron systems

研究代表者

鹿島 洋平(Kashima, Yohei)

大阪大学・数理・データ科学教育研究センター・特任助教(常勤)

研究者番号：20648282

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 800,000円

研究成果の概要(和文):結晶格子上を移動し相互作用する電子たちからなる量子多体系を正の温度下で解析した。系の諸物理量は量子統計力学の枠組みにそって定義される。電子間相互作用の強さを正に保ちつつ、低温領域で多体電子系を厳密に解析することは今日の数理物理学において重要な研究課題である。許される相互作用の強さの温度依存性を改良する目的において有効に機能するのが繰り込み群の方法である。本研究の主な成果は、繰り込み群の方法を厳密に構成することにより絶対零度へ至る広い温度領域で相互作用する多体電子系の数理解析が可能であることを示したことである。

研究成果の概要(英文):In this research project I analyzed quantum many-body systems of electrons hopping and interacting on a crystalline lattice at positive temperature. Physical quantities of the systems are defined within the framework of quantum statistical mechanics. It is an important theme of today's mathematical physics to rigorously analyze many-electron systems in low temperatures by keeping the intensity of electrons' interaction positive. Renormalization group method is believed to be effective to improve the temperature-dependency of allowed magnitude of interaction. The main achievement of this research project is that mathematical analysis of interacting many-electron systems in wide temperatures regions down to zero-temperature was made possible by rigorous construction of renormalization group methods.

研究分野：数理物理学、応用解析学

キーワード：多体電子系 数理物理学 数理解析学 量子統計力学 繰り込み群

## 1. 研究開始当初の背景

結晶格子上を移動し、相互作用する電子たちからなる量子多体系を正の温度下で数学的に解析することは比較的新しい研究テーマである。系の物理量は量子統計力学の枠組みにそって定義されるが、2008年に自由な共分散行列の有界性定理が初めて作られ ([W. de Siqueira Pedra and M. Salmhofer, Commun. Math. Phys. 282(2008), 797--818])、大分配関数の系の体積に依らない明示的評価が可能となった。筆者は2009年に系の厳密な定式化の方法を提案し ([Y. Kashima, Rev. Math. Phys. 21(2009), 981--1044])、前年に作られた共分散行列の有界性定理と組み合わせることで多体電子系の摂動論に明示的な誤差評価を与えた。以降2014年の本研究課題採択までその土台の上に厳密な解析理論の構築を行っていた。それまでに作った理論において本質的に改良が望まれる部分は電子間相互作用の強さの温度依存性であった。温度依存性を改良することにより相互作用する多体電子系を低温領域まで解析できるようになる。広いパラメータ領域でモデルを厳密に解析することが当初(2014年)の動機であった。

## 2. 研究の目的

結晶格子上を移動し、相互作用する多体電子系を正の温度下で解析するために必要な厳密な方法を開発することが目的であった。特に物理現象の説明のために多体電子系のモデルを考察する物性物理学に対して厳密な結果を提供することを念頭に置き、明解な方法を作ることを目標とした。具体的には2014年までに作った枠組みの上に繰り込み群の方法(マルチスケール解析)を新たに構築し、相互作用の強さをゼロに減少させることなく絶対零度に至る広い温度領域でモデルを解析することを目標とした。

## 3. 研究の方法

数理解析の手法を駆使して研究することが全般的な内容である。有限の空間格子を考え、その上を移動し相互作用する電子たちからなる系の全エネルギーを記述するハミルトニアンをモデルとして研究の核に置く。ハミルトニアンはフェルミオンフォック空間上の演算子として厳密な意味を持っている。特に空間格子の有限性より、状態のヒルベルト空間であるフェルミオンフォック空間は有限次元である。温度を正として、大分配関数をモデルの相互作用項に関する冪級数として展開する。各次の項は温度変数(虚時間変数)に関する多重積分で表すことができるが、その多重積分をリーマン和で置き換えたものは大分配関数の近似となる。実際離散化のメッシュサイズを0に送るとそれは大分配関数

に相互作用の強さを決めるパラメータ(結合定数)に関して局所一様に収束することが証明される。そのように導かれた大分配関数の近似式は有限次元グラスマンガウシアン積分として厳密に表すことができる。系の体積、虚時間変数に関する積分の離散化のメッシュサイズを固定して、有限次元グラスマン積分表示を解析することが研究の主要な内容である。なお有限次元グラスマン代数上の微積分についてはすでに厳密な理論が作られている ([J. Feldman, H. Knörrer and E. Trubowitz, CRM monograph series 16, AMS, 2002])。グラスマン積分のパラメータに依らない有界性を証明し、その後各パラメータを極限に送り(時間連続極限、無限体積極限、絶対零度極限)、元々のモデルにおける物理量に関する厳密な結論に至ることが研究の基本方針である。上で述べた通りグラスマン積分の導出方法から時間連続極限の存在は自然に従う。グラスマン積分表示の摂動級数の各次の項を特徴付けることにより無限体積極限の存在も示される。結合定数の大きさを正に保ちつつ絶対零度極限を取ることは本質的な問題となる。そこで必要となるのは温度変数に関してグラスマン積分を精密に評価することであり、その目的において繰り込み群の方法が有効に機能する。

## 4. 研究成果

得られた成果は発表論文にまとめられている。発表論文は査読付き雑誌から出版されたものが2編、査読付き雑誌に投稿中のプレプリントが2編であり、以下の5欄に挙げられている。それぞれの論文の内容について説明する。

[雑誌論文] 格子上で相互作用する多体電子系を正の温度下で解析するとき、電子間の結合定数が温度のある冪乗よりも小さいという条件の下では相互作用項に関する摂動論が有効である。しかしこの条件は低温で相互作用する多体電子系においては厳しい制限である。結合定数の温度依存性を改良するためには運動量空間における分散関係の零点の周りでのマルチスケール解析(繰り込み群の方法)が有力な方法と考えられている。そこで本論文では、正の温度下での多体電子系に対し、松原周波数上のマルチスケール展開(紫外積分)と運動量空間におけるマルチスケール展開(赤外積分)を統一的に構成し、一般的な設定でまとめた。これらの評価式を平方格子上のハバードモデルに適用し、格子点あたりの電子数の期待値が1であり(half-filled)、格子の最小の四辺形あたりの磁束がであるような外部磁場が与えられているならば、系の自由エネルギー密度は結合定数に関して温度に依存しない原点の近傍において解析的であり、温度を0にする極限に一樣に収束することを証明した。一方

で、平方格子上の half-filled のハバードモデルの自由エネルギー密度を外部磁場を変化させて最小化する問題 (flux phase problem) を考えた。自由エネルギー密度が最小となるための十分条件は格子の最小の四辺形あたりの磁束が  $\pi$  であることが E. Lieb によって 1994 年に証明されている ([E. H. Lieb, Flux phase of the half-filled band, Phys. Rev. Lett. 73 (1994), 2158])。したがって flux phase problem における最小自由エネルギー密度の結合定数に関する温度に依存しない原点の近傍での解析性と温度を 0 にする極限への一様収束性が証明されたことになる。筆者が知る限り、論文発表当時空間 2 次元以上の非自明な多体電子系において絶対零度まで結合定数に関する解析性が証明されているのは蜂の巣格子上の half-filled のハバードモデルのみであった ([A. Giuliani and V. Mastropietro, The two-dimensional Hubbard model on the honeycomb lattice, Commun. Math. Phys. 293 (2010), 301--346])。本論文によってそれ以外の模型の例が与えられたことになる。また flux phase problem との関係と最小自由エネルギー密度の解析性も初めて示された。本論文の結論はこれらの系において弱い相互作用によって引き起こされる相転移は絶対零度まで存在しないことを意味し、それは物理的にも非自明かつ興味深いことである。

[雑誌論文] 本論文は雑誌論文 の続編である。雑誌論文 では絶対零度極限の存在証明に必要な補題を体系的に整理することを焦点としていたため、同じ枠組み内で取り扱うことのできるモデルの例は 1 つのみを挙げている。本論文ではどのようなクラスの多体電子系のモデルに対して自由エネルギー密度の絶対零度極限の存在がいえるかを調べた。その結果、空間次元、磁束の条件、相互作用項に関して雑誌論文 の主定理を拡張する定理を得た。具体的には、次元が 2 以上の超立方格子上の half-filled の多体電子系において、相互作用項がいくつかの対称性と有界性を満たし、市松模様状の外部磁場が与えられているならば、系の自由エネルギー密度は結合定数に関して原点の近傍で解析的であり、無限体積・絶対零度極限へ一様に収束する。これらの相互作用項に関する条件と外部磁場に関する条件は、自由エネルギー密度が一般次元の flux phase problem における最小自由エネルギー密度となるための十分条件を含んでいる。したがって一般次元の最小自由エネルギー密度についても同様の解析性と無限体積・絶対零度極限への収束性が成り立つ。本論文により、絶対零度までの結合定数に関する解析性が成り立つ非自明なモデルの例が多く存在することが示された。

[プレプリント] 本論文では低温超伝導の

微視的理論を構築した Bardeen、Cooper、Schrieffer が提案したモデル (BCS モデル) をグラスマン積分による定式化に基づいて解析した。1957 年の BCS 理論の発表以降多くの BCS モデルに関する数理論理的な論文が出版されたが、正の温度下での自発的対称性の破れとクーパー対長距離相関 (非対角長距離秩序) を元々の 4 点のフェルミオン作用素からなる相互作用を持ったハミルトニアンから証明している論文は意外と少ない。長い歴史を持った理論ゆえ全文を網羅してサーベイすることは困難だが、筆者の知る限り、一般の BCS モデルで超伝導相関が厳密に証明できるというコンセンサスはまだ無いようである。そこで本論文では複素数に拡張された外部磁場付きの BCS モデルにおいて正の温度下で自発的対称性の破れと非対角長距離秩序が起こるということを証明した。複素磁場はギャップ方程式の性質を変え、通常の BCS モデルではおこりえない高温、弱結合下で超伝導相が現れることがわかった。多体問題において外部磁場を複素数に拡張する取り組みは BCS 理論以前に Lee と Yang が提案して以来 ([C. N. Yang and T. D. Lee, Phys. Rev. 87 (1952), 404--409, 410--419]) 数理論理の重要なテーマである。最近の物理実験 ([X. Peng et al, Phys. Rev. Lett. 114 (2015), 010601]) でスピン系における Lee-Yang の零点が実験的に検知されており、ここでは複素磁場付きのスピン系と同一視できる実際の多体系を構成することが鍵となっている。したがって複素磁場付きの BCS モデルの数学的な研究は、物理現象の理論的予測とも考えられる。なお筆者の知る限り、複素磁場下で BCS モデルを解析したのは本論文が最初である。外部磁場を複素数に拡張することにより複雑な構造をもった相転移が現れることは興味深い。

[プレプリント] プレプリント の結果によりギャップ方程式が正の解を持つようなパラメータ領域で複素磁場付きの BCS モデルは解析できることがわかったが、その理論において相互作用の強さの上限は温度と複素磁場に著しく依存するという条件を課す必要があった。特にその条件の下では相互作用の強さを正に保ったまま高温から低温にいたる温度領域で相関を描くことができない。そこで本論文ではマルチスケール解析により相互作用の温度と複素磁場への依存性を改良した。結果として、複素磁場下のあるクラスの BCS モデルではいかなる低温においても自発的対称性の破れと非対角長距離秩序に特徴付けられた相転移が繰り返して起こることが証明された。マルチスケール解析によってパラメータ領域を拡張するためにハミルトニアンの自由な項にいくつかの条件を仮定することが必要となった。その条件を満たす自由なハミルトニアンの具体例は、3 または 4 次元の (超) 立方格子上的最近接格

子点間を移動する自由電子モデルで化学ポテンシャルがある臨界値を取るもの、あるいは蜂の巣格子上の最近接格子点間を移動する自由電子モデルで化学ポテンシャルが0であるものなどである。さらに明示的に求められた自由エネルギー密度の温度と複素磁場に関する正則性を調べ、この系で起きているのは2次の相転移であることを証明した。本論文により、複素磁場下のBCSモデルにおいてもマルチスケール解析(繰り込み群の方法)が適用できることが示された。繰り込み群が機能するモデルのクラスがさらに広がったことになる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

Yohei Kashima,  
Renormalization group analysis of  
multi-band many-electron systems at  
half-filling,  
The special issue for the 20th anniversary,  
Journal of Mathematical Sciences, the  
University of Tokyo, 23 (2016) 1--288.  
(査読有)

Yohei Kashima,  
The zero-temperature limit of the free  
energy density in many-electron systems at  
half-filling,  
Journal of Mathematical Sciences, the  
University of Tokyo, 24 (2017) 1--158.  
(査読有)

[学会発表](計11件)

鹿島洋平、  
多体電子系における絶対零度極限、  
スペクトル理論セミナー(学習院大学)  
2014年

鹿島洋平、  
多体電子系における繰り込み群の方法、  
東京無限可積分系セミナー(東京大学)  
2014年

鹿島洋平、  
多体電子系における繰り込み群の方法、  
応用数学合同研究集会(龍谷大学)  
2014年

鹿島洋平、  
多体電子系における絶対零度極限(ポスター  
発表)  
数学・数理科学専攻若手研究者のための異分  
野・異業種研究交流会2015(東京大学)  
2015年

鹿島洋平、  
一般次元の多体電子系における繰り込み群  
の方法、  
数理物理セミナー(九州大学)  
2016年

鹿島洋平、  
格子上的多体電子系の厳密な構成、  
結晶のらせん転位の数理(九州大学)  
2016年

鹿島洋平、  
複素磁場下のBCSモデルにおける超伝導、  
東京無限可積分系セミナー(東京大学)  
2016年

鹿島洋平、  
複素磁場下のBCSモデルにおける超伝導、  
応用数学合同研究集会(龍谷大学)  
2016年

鹿島洋平、  
多体電子系における指数評価の帰納的構造、  
阪大微分方程式セミナー(大阪大学)  
2017年

鹿島洋平、  
多体電子系における長距離秩序の存在と非  
存在について、  
工学と数学の接点を求めて(大阪大学)  
2017年

鹿島洋平、  
複素磁場下のBCSモデルにおける大域的な相  
転移、  
応用数学合同研究集会(龍谷大学)  
2017年

[その他]  
プレプリント(査読付き雑誌に投稿中)

Yohei Kashima,  
Superconducting phase in the BCS model  
with imaginary magnetic field,  
arXiv:1609.06121

Yohei Kashima,  
Superconducting phase in the BCS model with

imaginary magnetic field. II. Multi-scale  
infrared analysis,  
arXiv:1709.06714

6 . 研究組織

(1)研究代表者

鹿島 洋平 (KASHIMA, Yohei )  
大阪大学・数理・データ科学教育研究センター・特任助教  
研究者番号：2 0 6 4 8 2 8 2