様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 １２ 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８７０１４３

研究課題名（和文）計算可能測度論の基礎理論の構築

研究課題名（英文）Construction of computable measure theory

研究代表者
宮部　賢志（Miyabe, Kenshi）

明治大学・理工学部・専任准教授

研究者番号：００５８３８６６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：　本研究は計算可能測度論の基礎理論の構築を目指したものである．成果としてランダム性を測る新たな尺度を提案し，その尺度のより良い性質を示したことが挙げられる．具体的には，Schnorrランダム性に対する一様相対化から自然に表れる還元性としてLR還元のSchnorrランダム性版がMartin-Lofランダム性の場合のような良い性質を持つことを証明した．
　またLebesgueの微分定理に関連したランダム性として密度ランダム性という新たな概念を提唱した．マルチンゲールの収束に関わるこのランダム性は非常に多くの同値な特徴付けを持ち，広い応用が期待される．

研究成果の概要（英文）：　In this research, we aimed to develop the basis of computable measure theory. As products, we proposed some new measures of randomness and proved its nice properties. In concrete, we prove some nice properties of Schnorr randomness version of LR-reducibility, that naturally comes from uniform relativization of Schnorr randomness as LR-reducibility with Martin-Lof randomness does.
　We also proposed density randomness as a new randomness notions, which appears in the study of computability of Lebesgue density theorem. Density randomness is closely related with the convergence of martingales and has many equivalent characterizations. We hope to have many and wide applications of this notion.

研究分野：計算論

キーワード：計算可能測度論　Schnorrランダム性　密度ランダム性

１．研究開始当初の背景

(1)ランダムネスの理論の発展

本研究はアルゴリズム的ランダムネスの理論(algorithmic randomness)の応用分野に関する研究である．ランダムネスの理論は 20 世紀前半の von Mises による頻度説による確率の定式化を目指した理論に端を発している．20 世紀終わりには，計算可能性理論と結びつき，ランダムネスの理論の整備が急速に進んだ．しかし主眼はランダム性と計算可能性との関連に置かれており，通常は 2 進無限列の一様測度に対するランダム性を考察する．主な教科書として，

・Downey and Hirshfeldt ”Algorithmic Randomness and Complexity”(Springer)

・Nies ”Computability and Randomness”(Oxford)

などがある．

21 世紀に入って力学系や学習理論などの解析や確率論の分野において現れるランダム性と計算可能性との関連の研究が本格的に行われるようになった．この研究のためには計算可能解析学(computable analysis)の理論の整備が必要であった．

特に重要な転換点となったのは，2009 年頃の Hoyrup と Rojas らによる研究で，計算可能距離空間上の計算可能測度や各層計算可能性の研究である．彼らの動機は力学系のランダム性の理解にあり，そのために必要な道具を開発したのであった．

その後のエルゴード定理によるランダム性の特徴付けや，Lebesgue の微分定理によるランダム性の特徴付けの研究の発展に伴い，測度論の様々な定理の計算可能性が本質的な問題であることが分かってきた．計算可能測度論の統一的な理解が必要だという認識に至った．

(2)計算可能測度論の難しさ

計算可能測度論は計算可能解析学の技術を使って作られる．計算可能解析学は実関数およびその微分や積分，微分方程式などの概念の計算可能性を研究する分野であり，今日も発展を続けている実りの多い分野である．

計算可能測度論は計算可能解析学の技術を使って測度論の計算可能性を調べる分野である．しかし，測度論は可測集合などの最も基本的な概念にも非構成的で，計算可能性の観点から見て複雑な手法が使われている．そのため，測度論の計算可能性を考える際には素直には行かず，理論そのものを再構築する必要がある．

また計算可能測度論とランダム性との関連は部分的な結果が知られているに過ぎなかった．

２．研究の目的

(1)計算可能測度論の整備

本研究の第一の目的は測度論を計算可能測度論の観点から再構築し，統一的な理解を与えることにあった．測度論の計算可能性は解析学における様々な定理の計算可能性を調べる上で非常に有効である．一方で，各研究者が必要に応じて似た手法を繰り返し開発している状況が続いていた．これらに統一的な視点を与え，様々な定理のランダム性の研究を更に加速させることが目標の一つである．

(2) 複雑性の階層の理解

最も素直に計算可能性を可測関数に課した計算可能可測関数などの概念は，Schnorr ランダム性と相性が良い．しかし，通常の意味での計算可能関数や万能性が欲しい場合など，他のランダム性を考えることが自然な場合も多い．

ランダム性の階層に対応して，可測関数の計算可能性の階層がどのように対応しているのかは，重要な観点である．

３．研究の方法

計算論や確率論の書籍で情報収集をしつつ，計算可能解析学の手法で測度論の構成の計算可能性を調べる．また情報収集のために研究集会を開いたり，参加したりした．

2014 年 6 月にはシンガポールで行われた ”Conference on Computability, Complexity and Randomness 2014”に参加・発表し，他の研究者との交流を深めた．

2014 年 9 月には”Analysis, Randomness and Applications (ARA Japan 2014)”を André Nies と共に主催した．これは研究合宿で，ランダム性と解析学との関連についての研究者を招待した．合計で 16 名の参加者があった．情報交換に留まらず，具体的な問題について様々な議論を行った．

2015 年 1 月にはインドで開かれた”Asian Logic Conference 2015”に招待され，本研究の成果を発表した．ランダム性の新たな尺度を提案したものであり，多くのランダム性と相性の良いものである．また他の研究者と情報交換を行った．

2015 年 9 月にはドイツで開かれた” Measuring the Complexity of Computational Content: Weihrauch Reducibility and Reverse Analysis”の Dagstuhl Seminar に参加し，ランダム列の構築可能性についての結果を発表した．

2016年6月にはポルトガルのファロで開かれた” Thirteenth International Conference on Computability and Complexity in Analysis”での招待講演を行った．可測関数の計算可能性版のいくつかの変種についての講演である．ここで得られた助言を元に表現についての研究を本格的に始めることになる．

2017 年 2 月にはドイツで開かれた”Computability”の Dagstuhl Seminar に参加し，Schnorr ランダム性と計算可能ランダム性の Medvedev 次数での分離について話

した．参加者との議論により，一様性の観点の重要性についてより理解を深めた．

2018 年 3 月にはハワイ大学の Kjos-Hanssen 教授のもとに滞在し，ブラウン運動のランダム性について議論を行った．

４．研究成果

(1) 計算可測関数の概念について

測度論での可測関数の計算可能版として，計算可測関数の概念の適切な定義を得ることができた．また可測関数が様々な特徴付けを持つことに伴い，計算可測関数も様々な特徴付けを持つ．例えば，これまで知られていた各層関数の変種として特徴づけられる．このような計算可能測度論に対して統一的な視点が確立しつつある．

計算可測関数や計算可測集合は Schnorr ランダム性と相性が良い．しかし，通常の計算可能関数や，可算和を取るなどの基本的な操作で閉じていない．まさにそのことが，ランダム性との関連を調べる上で障害になる．そのため，集合演算や関数作用の計算可能性についての研究の推進が必要であることが明らかになった．

(2) 新たな還元性の提案

これまでのランダムネスの理論では，ランダム性の計算可能性を調べるときには Turing 還元や K 還元が使われてきた．計算可能性理論の文脈では自然な概念であり，ML ランダム性とも相性が良い．

しかし計算可能測度論においては Schnorr ランダム性の方が自然に振る舞う．その Schnorr ランダム性と Turing 還元や K 還元は相性が良くない．この文脈において自然な還元性は真理値表還元や Schnorr 還元などである．筆者は更に全域機械還元を提案し，この還元が様々なランダム性と相性が良いことを示した．また，本研究の副産物として Kolmogorov 複雑性による n ランダム性の特徴付けが得られた．

本研究は[4][5][6]の論文の結果を元に，[1]の論文としてまとめた．

(3) 密度ランダム性の提案

本研究の主要な応用先の一つが微分可能性によるランダム性の特徴付けである．Schnorr ランダム性の Lebesgue の微分定理による特徴付けの証明には，L^1 計算可能関数から作られるマルチンゲールの収束速度が計算可能であることが本質的である．

ML ランダム性を特徴づける積分検定から作られるマルチンゲールの収束速度は計算可能では抑えられない．そのため積分検定に対する Lebesgue の微分定理に対応するランダム性は ML ランダム性では不十分である．

このランダム性はこれまでに知られていなかった概念で，密度ランダム性という名前をつけ，いくつかの特徴付けを得た．

本研究は[3]の論文としてまとめた．

この結果は Solomonoff 万能推論における収束とも深い関係があり，様々な応用が期待される．

(4) 弱計算可能性とランダム性

Chaitin のΩは左 c.e.実数という意味で計算可能に近似できるが，同時に ML ランダムでもある不思議な数である．この左 c.e.実数の関数版が下側半計算可能関数であり，積分検定の定義にも用いられる．積分検定の収束速度を調べる上では，左 c.e.実数のランダム性に関する性質を調べることが基礎となる．

Solovay 還元と部分ランダム性との関係について基本的な結果を得た．

本研究の結果は，[2]の論文としてまとめた．

将来的にはこれを複素数や関数に拡張することで，密度ランダム性のより深い理解につなげたい．

(5) ランダム列からの一様計算可能性

関数作用によりランダム性に対応する関数階層がどのように変化するか．計算可能測度論を構築する上での基本的な問題となる．

その準備としてランダム性の概念を Muchnik 次数および Medvedev 次数で測った．いくつかのランダム性では Muchnik 次数が一致したが，Medvedev 次数の階層は壊れなかった．このことは一様計算可能性がランダム性の階層を保つ重要な作用素と見ることができることを意味している．これまでの研究では主に Turing 還元という部分計算可能性が使われてきた．更なる研究における足がかりとなっている．

本研究の結果は ” Muchnik degrees and Medvedev degrees of the randomness notions ” として論文にまとめ，現在投稿中である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　６件）

[1] Kenshi Miyabe. Coherence of reducibilities with randomness notions, Theory of Computing Systems, to appear.
DOI: 10.1007/s00224-017-9752-2
査読有り

[2] Kenshi Miyabe, André Nies, Frank Stephan. Randomness and Solovay degrees, Journal of Logic and Analysis, Vol. 10, pp.1-13, 2018.
DOI: 10.4115/jla.2018.10.3
査読有り

[3] Kenshi Miyabe, André Nies, Jing Zhang. Using Almost-Everywhere Theorems from Analysis to Study Randomness, The Bulletin

of Symbolic Logic, Vol. 22, Issue 3, pp. 305-331, 2016.
DOI: 10.1017/bsl.2016.10
査読有り

[4] Kenshi Miyabe. Reducibilities relating to Schnorr randomness, Theory of Computing Systems, Vol. 58, Issue 3, pp.441-462, 2016.
DOI: 10.1007/s00224-014-9583-3
査読有り

[5] Takayuki Kihara, Kenshi Miyabe. Unified Characterizations of Lowness Properties via Kolmogorov Complexity, Vol. 54, Issue 3, pp.329-358, 2015.
DOI: 10.1007/s00153-014-0413-8
査読有り

[6] Kenshi Miyabe. Schnorr triviality and its equivalent notions, Theory of Computing Systems, Vol. 56, Issue 3, pp.465-486, 2015.
DOI: 10.1007/s00224-013-9506-8
査読有り

〔学会発表〕（計　８件）

(1) 宮部賢志. Solomonoff の万能推論・アルゴリズム的確率. 第６回　人工知能学会汎用人工知能研究会. 2017.

(2) 宮部賢志．よりランダムな列を一様に計算できるか．日本数学会．2017.

(3) 宮部賢志.三角不等式が成り立たない距離上での実数の計算可能性について．日本数学会．2016.

(4) Kenshi Miyabe. Variants of layerwise computability. Thirteenth International Conference on Computability and Complexity in Analysis. 2016.

(5) 宮部賢志．ランダムの概念の多数問題．日本数学会．2016

(6) 宮部賢志．3 ランダムネスの複雑性による特徴付け．日本数学会．2015

(7) Kenshi Miyabe. Total-machine reducibility and randomness notions. Asian Logic Conference 2015. 2015.

(8) Kenshi Miyabe. Schnorr randomness versions of K, C, LR, vL-reducibilities. Conference on Computability, Complexity and Randomness 2014. 2014.

６．研究組織

(1)研究代表者

宮部　賢志（MIYABE, Kenshi）
明治大学・理工学部・准教授
研究者番号：00583866